ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2012-13
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5 - για την Τρίτη 4/12/2012

****Πρόβλημα 1.** Έστω K σώμα με $\mathrm{char}K = p$, $p =$πρώτος.
α) Έστω $a \in \overline{K}$ μιά ρίζα τού πολυωνύμου $f(x) = x^p - x - c \in K[x]$. Δείξτε τότε ότι και το $a + \overline{1}$ είναι ρίζα τού $f(x)$ και συμπεράνατε ότι $f(x) = \prod_{i=0}^{p-1}(x - a - \overline{i})$, $\overline{i} \in \mathbb{Z}_p$. (Σημείωση: $\mathrm{char}K = p$ και επομένως το $\mathbb{Z}_p$ μπορεί να θεωρηθεί ως υπόσωμα τού K).
β) Έστω $E = K(a)$, a όπως παραπάνω. Δείξτε ότι η επέκταση $K \leq E$ είναι επέκταση Galois.
γ) Δείξτε ότι υπάρχει μονομορφισμός ομάδων $\phi : \mathrm{Gal}(E/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_p$. (*Υπόδειξη:* Πώς ορίζεται ένας αυτομορφισμός $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/K)$;)
δ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ ή είναι ανάγωγο ή ότι αναλύεται πάνω από το K.

***Πρόβλημα 2.** Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ και έστω E το σώμα ανάλυσής του. Βρείτε την ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

****Πρόβλημα 3.** [Μονάδες 18] Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο με σώμα ανάλυσης E και έστω ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ είναι αβελιανή. Δείξτε ότι αν a είναι μια οποιαδήποτε ρίζα τού $f(x)$ τότε $E = \mathbb{Q}(a)$.

***Πρόβλημα 4.** Έστω K σώμα χαρακτηριστικής p και έστω $a \in K$ στοιχείο που δεν είναι p- ρίζα στοιχείου τού K (δηλ. $a \neq c^p$, για οποιοδήποτε $c \in K$). Έστω $b \in \bar{K}$ ρίζα τής εξίσωσης $x^p - a = 0$. Βρείτε το $\mathrm{Gal}(k(b)/K)$.

****Πρόβλημα 5.** Έστω $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο με μία μόνο πραγματική ρίζα. Έστω $E \leq \mathbb{C}$ το σώμα ανάλυσης τού $f(x)$. Δείξτε ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ είναι ισόμορφη προς την ομάδα S_3 των μεταθέσεων τριών στοιχείων.

****Πρόβλημα 6.** Έστω p πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι η ομάδα Galois τής επέκτασης $\mathbb{F}_{p^n} \leq \overline{\mathbb{Z}_p}$ είναι άπειρη ομάδα.

****Πρόβλημα 7.** Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο και E τό σώμα ανάλυσής του στο $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι το $f(x)$ έχει μία ρίζα στο $\mathbb{C}$ που δεν είναι στο $\mathbb{R}$. Έστω $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\sigma(z) = \bar{z}$ (συζυγία μιγαδικών αριθμών). Δείξτε ότι η σ επάγει ένα στοιχείο τής $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ (δηλ. ο περιορισμός τής σ στο E ορίζει ένα στοιχείο τής $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$). Βρείτε το αντίστοιχο ενδιάμεσο σώμα $\mathbb{Q} \leq L \leq E$ τής κυκλικής υποομάδας $< \sigma > \leq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ και τον βαθμό τής επέκτασης $[L : \mathbb{Q}]$.

****Πρόβλημα 8.** Δείξτε τίς ακόλουθες ιδιότητες των κυκλοτομικών πολυωνύμων:
α) $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$, όπου m είναι το γινόμενο των διαφορετικών πρώτων που εμφανίζονται στην ανάλυση τού n.
β) $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x)$, όπου $(p, n) = 1$.
γ) $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, όπου n περιττός φυσικός.
δ) Δείξτε ότι οι συντελεστές τού πολυωνύμου $\Phi_n(x)$ ικανοποιούν την ιδιότητα $a_k = a_{\phi(n)-k}$, για κάθε k με $0 \leq k \leq \phi(n)$.

***Πρόβλημα 9.** Έστω $\omega_7 = e^{2\pi i/7}$. Βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\omega_7 + \omega_7^5)$.