ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2012-13
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6 - για την Τρίτη 18/12/2012

***Πρόβλημα 1.** Θεωρούμε την επέκταση $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(i)$. Έστω $a, b \in \mathbb{Q}$.

α) Υπολογίστε το $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}}(a+bi)$.
β) Δείξτε ότι $a^2+b^2=1$ αν και μόνον αν υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Q}$ με $a = \frac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$, $b = \frac{2st}{s^2+t^2}$.

***Πρόβλημα 2.** α) Έστω p πρώτος αριθμός και ω μια μιγαδική πρωταρχική p-ρίζα τής μονάδος. Έστω $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Δείξτε ότι $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(1-\omega) = p$.
β) Έστω φυσικός $n \geq 3$ και ω μια μιγαδική πρωταρχική n-ρίζα τής μονάδος. Έστω $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Δείξτε ότι $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\omega) = 1$.

****Πρόβλημα 3.** Έστω p πρώτος και n, d φυσικοί αριθμοί. Θεωρούμε την επέκταση των πεπερασμένων σωμάτων $\mathbb{F}_{p^d} \leq \mathbb{F}_{p^{nd}}$.
α) Υπολογίστε την γραμμική απεικόνιση $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{p^{nd}}/\mathbb{F}_{p^d}} : \mathbb{F}_{p^{nd}} \to \mathbb{F}_{p^d}$.
β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{p^{nd}}/\mathbb{F}_{p^d}}$ είναι επί και ότι ο πυρήνας της είναι ένας $\mathbb{F}_{p^d}$-διανυσματικός χώρος διάστασης $n-1$.

****Πρόβλημα 4.** Έστω p πρώτος και n, d φυσικοί αριθμοί. Θεωρούμε την επέκταση των πεπερασμένων σωμάτων $\mathbb{F}_{p^d} \leq \mathbb{F}_{p^{nd}}$.
α) Υπολογίστε την απεικόνιση $\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{p^{nd}}/\mathbb{F}_{p^d}} : \mathbb{F}_{p^{nd}} \to \mathbb{F}_{p^d}$.
β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{p^{nd}}/\mathbb{F}_{p^d}}$ είναι επί.

***Πρόβλημα 5.** Έστω k σώμα με $\mathrm{char} k \neq 2$ και έστω n περιττός φυσικός. Δείξτε ότι αν το K περιέχει μια πρωταρχική n-ρίζα τής μονάδος τότε περιέχει και μια πρωταρχική $2n$-ρίζα τής μονάδος. Δείξτε ότι το παραπάνω δεν ισχύει στην περίπτωση που είτε $\mathrm{char} k = 2$ είτε το n είναι άρτιος.

****Πρόβλημα 6.** Έστω $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Έστω E το σώμα ανάλυσης τής f. Δείξτε ότι η επέκταση $\mathbb{Q} \leq E$ είναι κυκλική.