ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

****Πρόβλημα 1.** Έστω p ένας περιττός πρώτος αριθμός. Θέτουμε $a = \mathrm{Re}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$ (το πραγματικό μέρος τού αριθμού $e^{\frac{2\pi i}{p}}$). Δείξτε ότι:
α) $\mathbb{Q}(a) \leq \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$ και $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) : \mathbb{Q}(a)] = 2$.
β) $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = \frac{p-1}{2}$.

****Πρόβλημα 2.** **α)** Έστω $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x]$ βαθμού n. Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = m$. Αν $(n, m) = 1$ δείξτε ότι το $f(x)$ παραμένει ανάγωγο και ως πολυώνυμο τού $F[x]$.
β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - 9x^3 + 15x + 6$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})[x]$.

****Πρόβλημα 3.** Έστω $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε ως $2^{1/n}$ την μοναδική πραγματική θετική ρίζα τής εξίσωσης $x^n - 2 = 0$ και έστω $A_n = \mathbb{Q}(2^{1/n})$.
α) Υπολογίστε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq A_n$.
β) Αν $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \mid n$ δείξτε ότι $A_m \leq A_n$ και υπολογίστε τον βαθμό $[A_n : A_m]$.
γ) Αν $(m, n) = 1$ δείξτε ότι $A_{mn} = \mathbb{Q}(2^{1/m}, 2^{1/n})$.

***Πρόβλημα 4.** Δείξτε ότι η γωνία των 30^0 (και επομένως και το κανονικό 12-γωνο) είναι κατασκευάσιμη γωνία.

***Πρόβλημα 5.** Δείξτε ότι το κανονικό 9-γωνο δεν είναι κατασκευάσιμο.

****Πρόβλημα 6.** Δείξτε ότι η γωνία των 36^0 (και επομένως και το κανονικό 10-γωνο) είναι κατασκευάσιμη γωνία (δείτε την άσκηση # 4 τής παραγράφου & 7.5 από το βιβλίο τού Fraleigh.

****Πρόβλημα 7.** Έστω $K \leq K(a)$ μια επέκταση σωμάτων με $[K(a) : K] = n$. Όπως είδαμε στο μάθημα το $K(a)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα K.
α) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi_a : K(a) \to K(a)$ με $\phi_a(e) = ae$ είναι μια K-γραμμική απεικόνιση.
β) Δείξτε ότι το a είναι ρίζα τού χαρακτηριστικού πολυωνύμου τής ϕ_a. Ποιά είναι επομένως η σχέση τού χαρακτηριστικού πολυωνύμου τής ϕ_a με το $\mathrm{Irr}(a, K)$;
γ) Βρείτε ένα μονικό πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$ πού έχει ως ρίζα το $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ (Υπόδειξη: δείξτε πρώτα με ένα σύντομο επιχείρημα ότι $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) : \mathbb{Q}] = 3$).

***Πρόβλημα 8.** Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E για το πολυώνυμο $x^{p^{100}} - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$, $p =$ πρώτος αριθμός.

****Πρόβλημα 9.** Δίδεται το πολυωνύμου $f(x) = x^3 + 6x - 14 \in \mathbb{Q}[x]$.
α) Δείξτε ότι το $f(x)$ έχει ακριβώς μία θετική πραγματική ρίζα $a \in \mathbb{R}$ ($a > 0$) και δύο καθαρά μιγαδικές ρίζες $b, \bar{b} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

β) Βρείτε το ανάγωγο πολυώνυμο $\mathrm{Irr}(a, \mathbb{Q})$ τού a πάνω από το σώμα $\mathbb{Q}$.
γ) Βρείτε το ανάγωγο πολυώνυμο $\mathrm{Irr}(\sqrt{a}, \mathbb{Q})$ τού $\sqrt{a}$ πάνω από το σώμα $\mathbb{Q}$.
δ) Δείξτε ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη τετράγωνο εμβαδού ίσου προς a.
ε) Βρείτε το ανάγωγο πολυώνυμο $\mathrm{Irr}(b, \mathbb{Q}(a))$ τού b πάνω από το σώμα $\mathbb{Q}(a)$.

****Πρόβλημα 10.** Έστω E ένα σώμα ανάλυσης τής $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Βρείτε τον βαθμο τής επέκτασης $[E : \mathbb{Z}_2]$.

***Πρόβλημα 11.** Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E για το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ και, επίσης, βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $[E : \mathbb{Q}]$.

***Πρόβλημα 12.** Δείξτε ότι το $2\cos(2\pi/5)$ ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 + x - 1 = 0$. Δείξτε ότι το κανονικό πεντάγωνο είναι κατασκευάσιμο.