ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3

Πρόβλημα 1. Έστω $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Έστω $E \subseteq \mathbb{C}$ το σώμα ριζών του και έστω $\xi \in E$ μια ρίζα τού $f(x)$.
α) Δείξτε ότι και το $\xi^2 - 2 \in E$ είναι, επίσης, ρίζα τού $f(x)$.
β) Βρείτε ποιά είναι η τρίτη ρίζα τού $f(x)$, ως έκφραση τής ξ.
γ) Βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $[E : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 2. Έστω $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ και έστω $E \subseteq \mathbb{C}$ το σώμα ριζών του.
α) Δείξτε ότι το $f(x)$ είναι ανάγωγο και ότι έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα ξ.
β) Έστω ρ μια μιγαδική ρίζα τού $f(x)$. Δείξτε ότι $[\mathbb{Q}(\xi, \rho) : \mathbb{Q}] = 6$.
γ) Δείξτε ότι $E = \mathbb{Q}(\xi, \rho)$.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα πρέπει να έχει άπειρα το πλήθος στοιχεία. Επομένως, τα σώματα $\mathbb{Z}_p$, p =πρώτος αριθμός, δεν είναι αλγεβρικά κλειστά σώματα.

Πρόβλημα 4. Έστω $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
α) Δείξτε ότι το $f(x)$ είναι ανάγωγο.
β) Έστω ξ μια ρίζα τού $f(x)$ σε μια επέκταση τού $\mathbb{Z}_5$. Δείξτε ότι το $E = \mathbb{Z}_5(\xi)$ είναι ένα σώμα ριζών τού $f(x)$.
γ) Δείξτε ότι το E έχει 25 στοιχεία και γράψτε τα ως πολυωνυμικές εκφράσεις τού ξ με συντελεστές στο $\mathbb{Z}_5$.

Πρόβλημα 5. Έστω p πρώτος αριθμός. Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E τού πολυωνύμου $x^p - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ και δείξτε ότι $[E : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι αν E σώμα ανάλυσης ενός πολυωνύμου τού $\mathbb{Q}[x]$ βαθμού 3 τότε $[E : \mathbb{Q}] = 1,\ 2,\ 3,\ 6$. Δώστε παραδείγματα για κάθε περίπτωση.

Πρόβλημα 7. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Συμβολίζουμε ως a μία ρίζα τού $f(x)$ σε μία αλγεβρική θήκη $\overline{\mathbb{Z}}_3$ τού $\mathbb{Z}_3$. Δείξτε ότι το $\mathbb{Z}_3(a)$ είναι σώμα ανάλυσης τού πολυωνύμου $x^4 + x^3 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

Πρόβλημα 8. Έστω K σώμα χαρακτηριστικής $p \neq 0$ και έστω $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο .
α) Δείξτε ότι $f(x) = g(x^{p^e})$, $e \geq 0$, όπου $g(x)$ ανάγωγο διαχωρίσιμο πολυώνυμο τού $K[x]$.
β) Δείξτε ότι κάθε ρίζα τού $f(x)$ σε μια αλγεβρική θήκη $\bar{K}$ τού K έχει (την ίδια) πολλαπλότητα p^e.

Πρόβλημα 9. Έστω K σώμα με $\mathrm{char}K = p$, p =πρώτος και $a \in K$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^{p^n} - a \in k[x]$ (n θετικός ακέραιος) είναι ανάγωγο εάν και μόνον εάν το a δεν έχει $p-$ρίζα στο K.