ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Πρόβλημα 1. Έστω p περιττός πρώτος και $F = F_{p^n}$ το πεπερασμένο σώμα με p^n στοιχεία.
α) Δείξτε ότι το σύνολο $F^2 = \{a^2,\, a \in F\}$ έχει $\frac{p^n+1}{2}$ στοιχεία. Συμπεράνατε ότι, αν $t \in F$ τότε και το σύνολο $t - F^2 = \{t - a^2,\, a \in F\}$ έχει $\frac{p^n+1}{2}$ στοιχεία.
β) Για $t \in F$ δείξτε ότι το σύνολο $F^2 \cap (t - F^2)$ είναι μή κενό και συμπεράνατε ότι κάθε στοιχείο c τού F γράφεται στην μορφή $c = a^2 + b^2$, $a, b \in F$.
γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ έχει μή τετριμμένη λύση στο F (τετριμμένη λύση είναι η $x = y = z = 0$).

Πρόβλημα 2. **α)** Έστω $\mathbb{F}_{p^m}$ και $\mathbb{F}_{p^n}$ τα υποσώματα τού $\overline{\mathbb{Z}_p}$ με p^n και p^m στοιχεία αντίστοιχα. Βρείτε το σώμα $\mathbb{F}_{p^m} \cap \mathbb{F}_{p^n}$.

Πρόβλημα 3. Έστω $n \mid m$ και θεωρείστε την επέκταση $\mathbb{F}_{p^n} \leq \mathbb{F}_{p^m}$. Βρείτε την όμάδα $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_{p^n})$.

Πρόβλημα 4. Έστω K σώμα με $\mathrm{char}K = p$, $p =$πρώτος.
α) Έστω $a \in \overline{K}$ μιά ρίζα τού πολυωνύμου $f(x) = x^p - x - c \in K[x]$. Δείξτε τότε ότι και το $a + \bar{1}$ είναι ρίζα τού $f(x)$ και συμπεράνατε ότι $f(x) = \prod_{i=0}^{p-1}(x - a - \bar{i})$, $\bar{i} \in \mathbb{Z}_p$. (Σημείωση: $\mathrm{char}K = p$ και επομένως το $\mathbb{Z}_p$ μπορεί να θεωρηθεί ως υπόσωμα τού K).
β) Έστω $E = K(a)$, a όπως παραπάνω. Δείξτε ότι η επέκταση $K \leq E$ είναι επέκταση Galois.
γ) Δείξτε ότι υπάρχει μονομορφισμός ομάδων $\phi : \mathrm{Gal}(E/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_p$. (*Υπόδειξη:* Πώς ορίζεται ένας αυτομορφισμός $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/K)$;)
δ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ ή είναι ανάγωγο ή ότι αναλύεται πάνω από το K.

Πρόβλημα 5. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ και έστω E το σώμα ανάλυσής του. Βρείτε την ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

Πρόβλημα 6. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο με σώμα ανάλυσης E και έστω ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ είναι αβελιανή. Δείξτε ότι αν a είναι μια οποιαδήποτε ρίζα τού $f(x)$ τότε $E = \mathbb{Q}(a)$.

Πρόβλημα 7. Έστω K σώμα χαρακτηριστικής p και έστω $a \in K$ στοιχείο που δεν είναι p- ρίζα στοιχείου τού K (δηλ. $a \neq c^p$, για οποιοδήποτε $c \in K$). Έστω $b \in \bar{K}$ ρίζα τής εξίσωσης $x^p - a = 0$. Βρείτε το $\mathrm{Gal}(k(b)/K)$.

Πρόβλημα 8. Έστω $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο με μία μόνο πραγματική ρίζα. Έστω $E \leq \mathbb{C}$ το σώμα ανάλυσης τού $f(x)$. Δείξτε ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ είναι ισόμορφη προς την ομάδα S_3 των μεταθέσεων τριών στοιχείων.

Πρόβλημα 9. Έστω p πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι η ομάδα Galois τής επέκτασης $\mathbb{F}_{p^n} \leq \overline{\mathbb{Z}_p}$ είναι άπειρη ομάδα.