

ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6

Πρόβλημα 1. Δείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες των κυκλοτομικών πολυωνύμων:

α) $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$, όπου m είναι το γινόμενο των διαφορετικών πρώτων που εμφανίζονται στην ανάλυση του n .

β) $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x)$, όπου $(p, n) = 1$.

γ) $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, όπου n περιττός φυσικός.

δ) Δείξτε ότι οι συντελεστές του πολυωνύμου $\Phi_n(x)$ ικανοποιούν την ιδιότητα $a_k = a_{\phi(n)-k}$, για κάθε k με $0 \leq k \leq \phi(n)$.

Πρόβλημα 2. Έστω $\omega_7 = e^{2\pi i/7}$. Βρείτε τον βαθμό της επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\omega_7 + \omega_7^5)$.

Πρόβλημα 3. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο και E τό σώμα ανάλυσης του στο \mathbb{C} . Υποθέτουμε ότι το $f(x)$ έχει μία ρίζα στο \mathbb{C} που δεν είναι στο \mathbb{R} . Έστω $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $\sigma(z) = \bar{z}$ (συζυγία μιγαδικών αριθμών). Δείξτε ότι η σ επάγει ένα στοιχείο της $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ (δηλ. ο περιορισμός της σ στο E ορίζει ένα στοιχείο της $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$). Βρείτε το αντίστοιχο ενδιάμεσο σώμα $\mathbb{Q} \leq L \leq E$ της κυκλικής υποομάδας $\langle \sigma \rangle \leq \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ και τον βαθμό της επέκτασης $[L : \mathbb{Q}]$.