

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2006-07
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 10

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

* **Πρόβλημα 1.** Εστω R ένας δακτύλιος διακριτής εκτίμησης (DVR) με σώμα κλασμάτων K . Εστω m_R το (μοναδικό) μέγιστο ιδεώδες του R .

α) Δείξτε ότι αν $x \in K$ και $x \notin R$ τότε $x^{-1} \in m_R$.

β) Εστω S ένας δακτύλιος διακριτής εκτίμησης (DVR) με την ιδιότητα $R \subseteq S \subseteq K$ (όπου \subseteq σημαίνει υποδακτύλιος). Υποθέτουμε ότι το μέγιστο ιδεώδες m_S του S περιέχει το m_R . Δείξτε ότι $S = R$. (Σημείωση: Παρατηρήστε ότι το K είναι, επίσης, το σώμα κλασμάτων του S).

* **Πρόβλημα 2.** α) Θεωρούμε το πρώτο ιδεώδες $P = (x^2 + 1)$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[x]_P$ είναι δακτύλιος διακριτής εκτίμησης (D.V.R.).

β) Θεωρούμε το πρώτο ιδεώδες $P = (x, 2)$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[x]_P$ δεν είναι δακτύλιος διακριτής εκτίμησης.

* **Πρόβλημα 3.** Δείξτε ότι κάθε Π.Κ.Ι είναι δακτύλιος τού Dedekind.