ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2006-07
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Εστω $\omega^2 = -5$ και $\mathbb{Z}[\omega] = \{n + m\omega,\ n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.
α) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\omega]$.
β) Δείξτε ότι το στοιχείο 6 έχει δύο διαφορετικές αναλύσεις ως γινόμενο αναγώγων στοιχείων του $\mathbb{Z}[\omega]$. Έστω $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{m + n\omega,\ m, n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $\omega^2 = -5$. Δείξτε ότι στον παραπάνω δακτύλιο το στοιχείο $2 + \omega$ είναι ανάγωγο αλλά όχι πρώτο.

***Πρόβλημα 2.** Έστω $S = \{a + xf(x, y),$ όπου $a \in \mathbb{Z}$ και $f(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]\}$.
α) Δείξτε ότι το S είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{Z}[x, y]$
β) Έστω

$$I_0 =< x >,\ I_1 =< x, xy >,\ I_2 =< x, xy, xy^2 >, \ldots, I_n =< x, xy, xy^2, \ldots, xy^n >, \ldots$$

Δείτε ότι τα παραπάνω ιδεώδη σχηματίζουν μιά άπειρη γνησίως αύξουσα ακολουθία ιδεωδών.

***Πρόβλημα 3.** Εστω R Π.Μ.Α. και $a \in R$. Δείξτε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος κύρια ιδεώδη που περιέχουν το ιδεώδες $< a >$.

****Πρόβλημα 4.** Έστω $S = \{a + x^3 f(x, y) + xyg(x, y) + y^3 h(x, y),$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $f(x, y), g(x, y), h(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]\}$.
α) Δείξτε ότι το S είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{R}[x, y]$
β) Δείξτε ότι x^3, xy, y^3 είναι ανάγωγα αλλά όχι πρώτα στοιχεία τού δακτυλίου S.
γ) Είναι κάθε υποδακτύλιος μιάς Π.Μ.Α. και αυτός Π.Μ.Α. ;

****Πρόβλημα 5.** Συμβολίζουμε ως S το σύνολο των ιδεωδών τού δακτυλίου R τα οποία έχουν την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο τους είναι μηδενοδιαιρέτης. Δείξτε ότι το σύνολο S έχει μεγιστικά (maximal) στοιχεία και ότι κάθε τέτοιο στοιχείο είναι ένα πρώτο ιδεώδες. Συνεπώς το σύνολο των μηδενοδιαιρετών τού R γράφεται ως ένωση πρώτων ιδεωδών.

****Πρόβλημα 6.** Αποδείξτε ότι αν R είναι Π.Κ.Ι. και $I \neq R$ είναι ιδεώδες τότε το I γράφεται ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών.

*****Πρόβλημα 7.** Θεωρούμε τον δακτύλιο R των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων.
α) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του.
β) Δείξτε ότι κάθε ιδεώδες που παράγεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων τού R, είναι κύριο ιδεώδες.
γ) Ποιά από τα κύρια ιδεώδη τού R είναι πρώτα ιδεώδη;
δ) Δείξτε ότι ο R δεν είναι Π.Μ.Α. (και επομένως ούτε Π.Κ.Ι.).

*****Πρόβλημα 8.** Στην παρακάτω άσκηση θεωρούμε γνωστό ότι το ιδέωδες των μηδενοδύναμων στοιχείων τού δακτυλίου R είναι η τομή όλων των πρώτων ιδεωδών τού R. Συμβολίζουμε ως Spec$R$ το σύνολο των πρώτων ιδεωδών τού δακτυλίου R. Επίσης, αν E υποσύνολο τού R συμβολίζουμε ως $V(E)$ το σύνολο των πρώτων ιδεωδών τού R που περιέχουν το E. Δείξτε ότι το σύνολο Spec$R$ εφοδιάζεται με μια τοπολογία (η οποία λέγεται τοπολογία τού Zariski) τα κλειστά σύνολα τής οποίας είναι τα $V(E)$ και τα οποία ικανοποιούν τίς παρακάτω ιδιότητες:

α) Αν $E \subseteq R$ συμβολίζουμε ως I_E το ιδεώδες πού παράγεται από το E, δηλ. $I_E = \sum_{a\in E} < a >$. Δείξτε ότι $V(E) = V(I_E) = V(\mathrm{Rad}(I_E))$.

β) $V(0) = X$, $V(\{1\}) = \emptyset$.

γ) Έστω E_i οικογένεια υποσυνόλων τού R. Τότε $V(\cup_{i\in I} E_i) = \cap_{i\in I} V(E_i)$.

δ) Αν τα I, J είναι ιδεώδη τού R τότε $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$. Επίσης, $V(I) \subseteq V(J) \iff \mathrm{Rad}I \supseteq \mathrm{Rad}J$.

ε) Έστω $a \in R$. Θεωρώντας το a ως μονοσύνολο, δείξτε ότι $V(a) = R \iff a$ μηδενοδύναμο.

στ) Για $a \in R$ ορίζουμε ως X_a το συμπλήρωμα τού $V(a)$ στο Spec$R$. Δείξτε ότι τα X_a, $a \in R$, αποτελούν μια βάση ανοικτών τής παραπάνω τοπολογίας.