ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2006-07
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** **α)** Έστω R ένας δακτύλιος τής Noether και I ιδεώδες τού R. Δείξτε ότι ο δακτύλιος πηλίκων R/I είναι δακτύλιος τής Noether.
β) Δείξτε ότι ένας υποδακτύλιος ενός δακτυλίου τής Noether δεν είναι, εν γένει, δακτύλιος τής Noether .

***Πρόβλημα 2.** Εστω $I = (x^2 + y^2 - 1, y - 1)$. Βρείτε ένα πολυώνυμο $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ με την ιδιότητα $F(x,y) \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) \backslash I$.

***Πρόβλημα 3.** **α)** Βρείτε το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(y - x^2, z - x^3)$ τού $\mathbb{C}^3$.
β) Δείξτε ότι $\mathbb{I}(\mathbb{V}(y - x^2, z - x^3)) = (y - x^2, z - x^3)$.
γ) Χρησιμοποιώντας τα α) και β) δείξτε ότι το ιδεώδες $(y - x^2, z - x^3)$ είναι πρώτο ιδεώδες.

***Πρόβλημα 4.** Πολλές από τις προτάσεις που ισχύουν όταν δουλεύουμε με το $\mathbb{C}$ δεν ισχύουν όταν δουλεύουμε με το $\mathbb{R}$:
α) Δείξτε ότι αν $F(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ τότε το αλγεβρικό σύνολο $V(F)$ είναι ανάγωγο. Βρείτε ένα ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{R}[x,y]$ για το οποίο το σύνολο $\mathbb{V}(F)$ να μην είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο τού $\mathbb{R}^2$.
β) Στους μιγαδικούς έχομε δεί ότι $\mathbb{V}(I) = \emptyset$ εάν και μόνον εάν $I = (1)$. Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει όταν δουλεύουμε στους πραγματικούς.
γ) Βρείτε ιδεώδες I στο $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ για το οποίο έχουμε ότι $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I) \neq \mathrm{Rad} I$.

****Πρόβλημα 5.** Έστω R ένας δακτύλιος τής Noether. Δείξτε ότι αν $\phi : R \longrightarrow R$ επιμορφισμός δακτυλίων τότε είναι αυτομορφισμός.

****Πρόβλημα 6.** **α)** Έστω $S = \{P_1, \ldots, P_r\}$ πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$ και Q σημείο τού $\mathbb{C}^2$ με $Q \notin S$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $F \in \mathbb{C}[x,y]$ με $F(P_i) = 0$ για κάθε $P_i \in S$ και $F(Q) = 1$.
β) Βρείτε αντιπαράδειγμα για τον παραπάνω ισχυρισμό στην περίπτωση που το S είναι άπειρο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$.

****Πρόβλημα 7.** Εστω $F(x,y)$, $G(x,y)$ πολυώνυμα του $\mathbb{C}[x,y]$ που είναι πρώτα μεταξύ τους. Δείξτε ότι το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(F,G)$ είναι πεπερασμένο. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι τα παραπάνω πολυώνυμα είναι πρώτα μεταξύ τους ως πολυώνυμα τού δακτυλίου $K[y]$ όπου $K = \mathbb{C}(y)$ το σώμα κλασμάτων τού δακτυλίου $\mathbb{C}[y]$).

****Πρόβλημα 8.** Δείξτε ότι το παρακάτω υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$ δεν είναι αλγεβρικό

$$\{(z,w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

*****Πρόβλημα 9.** Θεωρούμε το ιδεώδες $I =< xz - y^2, x^3 - yz >$ τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y, z]$
α) Δείξτε ότι το I δεν είναι πρώτο ιδεώδες.
β) Γράψτε το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(I)$ ως πεπερασμένη ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων τού $\mathbb{C}^3$.

*****Πρόβλημα 10.** Δείξτε ότι αν κάθε πρώτο ιδεώδες ενός δακτυλίου R είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε ο R είναι δακτύλιος τής Noether.