# ΑΛΓΕΒΡΑ I-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2006-07
# ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

*Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.*

*__Πρόβλημα 1.__ Εστω $M$ ένα $R-$module και $\phi : M \longrightarrow M$ ένας $R-$module ομομορφισμός γιά τον οποίον ισχύει ότι $\phi^2 = \phi$. Δείξτε τότε ότι το $R-$module $M$ είναι ισόμορφο με το $R-$module $\ker\phi \oplus \mathrm{Im}\phi$ (εξωτερικό ευθύ άθροισμα).

*__Πρόβλημα 2.__ Εστω $M, N$ δύο $R$-modules και $\phi : M \longrightarrow N$, $\psi : N \longrightarrow M$ ομομορφισμοί με $\psi \circ \phi = 1_M$. Δείξτε ότι $N = \mathrm{Im}\phi \oplus \mathrm{Ker}\psi$.

*__Πρόβλημα 3.__ Εστω $R \subseteq S \subseteq T$. Υποθέτουμε ότι κάθε στοιχείο του $T$ είναι ακέραιο πάνω από τον $S$ και ότι κάθε στοιχείο του $S$ είνα ακέραιο πάνω από τον $R$. Δείξτε τότε ότι κάθε στοιχείο του $T$ είναι ακέραιο πάνω από τον $R$.

**__Πρόβλημα 4.__ **α)** Θεωρούμε τον δακτύλιο των πολυωνύμων $K[x]$. Δείξτε ότι ο $K[x]$ είναι ένα $K-$module.
**β)** Θεωρούμε το ιδεώδες $< x^2 + x >$ του $K[x]$. Δείξτε ότι το $< x^2 + x >$ είναι ένα $K-$submodule τού $K[x]$ και ότι το $K[x]/ < x^2 + x >$ είναι ένα ελεύθερο $K-$module τάξης (rank) 2.

**__Πρόβλημα 5.__ Εστω $M$ ένα π.π. $R$-module και $\phi : M \longrightarrow R^n$ ένας $R$-module επιμορφισμός. Δείξτε ότι ο πυρήνας $\mathrm{Ker}\phi$ είναι ένα π.π. $R$-module.

**__Πρόβλημα 6.__ Δείξτε ότι αν γιά κάποιον δακτύλιο $R$ ισχύει ότι κάθε κυκλικό $R-$module είναι ελεύθερο, τότε ο $R$ είναι σώμα.

***__Πρόβλημα 7.__ **α)** Έστω $R$ μια ακέραια περιοχή που περιέχει τον δακτύλιο $\mathbb{R}[x]$. Δείξτε ότι αν ο $R$ ένα π.π. $\mathbb{R}[x]-$module τότε είναι ελεύθερο (free) $\mathbb{R}[x]-$module.
**β)** Έστω $R = \mathbb{R}[x, y]/ < x^2 - y^3 >$ και $t = x^n y^m$ για κάποιους θετικούς ακέραιους $n, m$. Δείξτε ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος $\mathbb{R}[t]$ μπορεί να θεωρηθεί ως υποδακτύλιος τού $R$ και επίσης ότι ο $R$ ως $\mathbb{R}[t]-$module είναι (free). Δείξτε ότι το rank τού $R$ είναι $3n + 2m$.

*** __Πρόβλημα 8.__ Έστω $R$ ένας δακτύλιος και $M$ ένα π.π. $R-$module. Αν $\phi : M \longrightarrow M$ είναι ένας $R-$module επιμορφισμός δείξτε ότι είναι ισομορφισμός. (Υπόδειξη: το $M$ μπορεί να θεωρηθεί ως $R[t]-$module ($t$ =μεταβλητή). Πάρτε το ιδεώδες $I = (t) \in R[t]$).