ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2006-07
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #7

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Εστω $K \subseteq L$ σώματα. Δείξτε ότι το σύνολο των στοιχείων $\mathcal{O}_{L|K}$τού L που είναι ακέραια (αλγεβρικά) πάνω από το K είναι υπόσωμα τού L.

***Πρόβλημα 2.** Εστω $K \subseteq L$ σώματα. Έστω ότι τα $v_1, \cdots, v_n \in L$ είναι αλγεβρικά πάνω από το K. Δείξτε τότε ότι αν R είναι δακτύλιος με $K \subseteq R \subseteq k[v_1, \cdots, v_n]$ τότε ο R είναι σώμα.

****Πρόβλημα 3.** Εστω $K \subseteq L$ σώματα και $\mathcal{O}_{L|K}$ το υπόσωμα του L όπως στο πρόβλημα 1.
α) Δειξτε ότι αν ένα στοιχείο του L είναι ακέραιο (αλγεβρικό) πάνω απο το $\mathcal{O}_{L|K}$ τότε είναι ακέραιο (αλγεβρικό) και πάνω απο το K.
β) Εστω ότι το L είναι, ειδικότερα, ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα δηλ. κάθε πολυώνυμο $f(x) \in k[x]$ με $\deg f(x) = n$ γράφεται ως $f(x) = c \sqcap_{i=1}^{n} (x - a_i)$ όπου $c, a_i \in K$. Δείξτε τότε ότι αν f, g είναι μονικά πολυώνυμα του $L[x]$ με $fg \in \mathcal{O}_{L|K}[x]$, τότε τα f, g θα είναι πολυώνυμα στο $\mathcal{O}_{L|K}[x]$. (*Υπόδειξη:* εφαρμόστε το **α)**).

****Πρόβλημα 4.** Εστω $K \subseteq L$ σώματα και $\mathcal{O}_{L|K}$, όπως στο πρόβλημα 1. Δείξτε ότι το σύνολο των στοιχείων του δακτυλίου $L[x]$ που είναι ακέραια πάνω από τον δακτύλιο $K[x]$ είναι ακριβώς ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{L|K}[x]$, δηλ. $\mathcal{O}_{L[x]|K[x]} = \mathcal{O}_{L|K}[x]$. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το πρόβλημα 3).

*****Πρόβλημα 5.** Έστω p ένα πρώτο ιδεώδες δακτυλίου R. Συμβολίζουμε ως $p[x]$ τα πολυώνυμα τού x με συντελεστές στο p. Δείξτε ότι το $p[x]$ είναι πρώτο ιδεώδες τού $R[x]$. Αν το m είναι μέγιστο ιδεώδες τού R, αληθεύει ότι το $m[x]$ θα είναι μέγιστο ιδεώδες τού $R[x]$;