ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2006-07
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #8

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$ και το υποσύνολο $S = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$. Δείξτε ότι το S είναι πολλαπλασιαστικό και ότι $S^{-1}\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2$.

***Πρόβλημα 2.** Εστω R ακέραια περιοχή με σώμα κλασμάτων K. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in K - \{0\}$ έχομε ότι $x \in R$ είτε $x^{-1} \in R$. Δείξτε τότε ότι ο R είναι τοπικός δακτύλιος.

***Πρόβλημα 3.** Εστω I ιδεώδες του δακτυλίου A και S πολλαπλασιαστικό υποσύνολο του A. Δείξτε ότι $\mathrm{Rad}(S^{-1}I) = S^{-1}\mathrm{Rad}(I)$.

****Πρόβλημα 4.** Υποθέτουμε ότι στον δακτύλιο R κάθε πρώτο ιδεώδες p έχει την ιδιότητα ότι ο δακτύλιος R_p δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία εκτός από το 0. Δείξτε τότε ότι και ο δακτύλιος R δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία εκτός από το 0. Αν ο R_p είναι ακέραια περιοχή για κάθε πρώτο ιδεώδες p, συνεπάγεται ότι ο R είναι ακέραια περιοχή;

****Πρόβλημα 5.** Έστω Σ το σύνολο όλων των πολλαπλασιαστικών υποσυνόλων τού δακτυλίου R. Δείξτε ότι το Σ έχει μέγιστα στοιχεία και ότι το $S \in \Sigma$ είναι μέγιστο αν και μόνο αν το $R - S$ είναι ελάχιστο πρώτο ιδεώδες τού R.

*****Πρόβλημα 6.** Έστω A υποδακτύλιος τού δακτυλίου B με την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο τού B είναι ακέραιο πάνω από τον A. Έστω M ένα μέγιστο ιδεώδες τού B και έστω $m = M \cap A$. Είναι κάθε στοιχείο τού B_M ακέραιο πάνω από τον A_m;