ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2006-07
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #9

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

* **Πρόβλημα 1.** Εστω $\mathbb{Z}[i]$ ο δακτύλιος των ακεραίων τού Gauss. Βρείτε μια ελάχιστη (minimal) ανάλυση τού ιδεώδους $I = (8+4i)$ σε πρωταρχικά ιδεώδη.

* **Πρόβλημα 2.** Εστω I ριζικό ιδεώδες δακτυλίου R το οποίο έχει ανάλυση σε primary ιδεώδη. Δείξτε ότι το I δεν έχει εμβυθισμένα πρώτα ιδέωδη.

* **Πρόβλημα 3.** Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$ θεωρούμε το μέγιστο ιδεώδες του $\mathbf{m} = (2, x)$.
α) Δείξτε ότι το ιδεώδες $I = (4, x)$ είναι $\mathbf{m}$-primary.
β) Δείξτε ότι το I δεν είναι της μορφής $\mathbf{m}^n$, $n \in \mathbb{N}$ (γινόμενο τού $\mathbf{m}$ με τον εαυτό του n φορές).

* **Πρόβλημα 4.** Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y, z]$. Βρείτε μια ελάχιστη πρωταρχική ανάλυση τού ιδέωδους $< xy, x - yz >$.

** **Πρόβλημα 5.** Θεωρούμε το ιδεώδες $I =< x^2, xy >\subseteq \mathbb{Q}[x, y]$. Δείξτε ότι
α) $I =< x > \cap < x^2, xy, y^2 >=< x > \cap < x^2, y >$ είναι δύο διαφορετικές ελάχιστες αναλύσεις τού ιδεώδους I σε primary ιδεώδη.
β) Για κάθε $a \in \mathbb{Q}$ δείξτε ότι $I =< x > \cap < x^2, y - ax >$ είναι μια ελάχιστη ανάλυση τού ιδεώδους I σε primary ιδεώδη. Συνεπώς, το I έχει άπειρες το πλήθος διαφορετικές ελάχιστες αναλύσεις σε primary ιδεώδη.

** **Πρόβλημα 6.** Εστω p πρώτο ιδεώδες δακτυλίου R και έστω K ο πυρήνας τού κανονικού ομομορφισμού $\phi : R \longrightarrow R_p$ που ορίζεται από $\phi(r) = \frac{r}{1}$. δείξτε ότι
α) $S \subseteq p$.
β) $\mathrm{Rad}(S) = p \Longleftrightarrow p$ ελάχιστο πρώτο ιδεώδες τού R.
γ) Αν q πρώτο ιδεώδες με $q \subseteq p$ τότε $S_p \subseteq S_q$.

** **Πρόβλημα 7.** Θεωρούμε το ιδεώδες $I =< x^2, xy, y^2 >\subseteq \mathbb{C}[x, y]$. Δείξτε ότι το ιδεώδες I είναι primary ιδεώδες αλλά δεν είναι ανάγωγο ιδεώδες.

** **Πρόβλημα 8.** Στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y, z]$ έστω $p_1 =< x, y >$, $p_2 =< x, z >$ και $m =< x, y, z >$. Εστω $q = p_1p_2$. Βρείτε μια ελάχιστη ανάλυση τού q σε πρωταρχικά ιδεώδη. Βρείτε ποιά είναι τα εμβυθισμένα ιδεώδη και ποιά τα ελάχιστα ιδεώδη τής ανάλυσης.

*****Πρόβλημα 9.** **α)** Έστω R ακτύλιος και $R[x]$ ο δακτύλιος μεταβλητής x με συντελεστές στο R. Δείξτε ότι αν το q είναι p-πρωταρχικό ιδεώδες τού R τότε το $q[x]$ είναι $p[x]$-πρωταρχικό ιδεώδες τού $R[x]$. (Σημείωση: από την άσκηση 5, φυλλάδιο 7, γνωρίζουμε ότι το $p[x]$ είναι πρώτο ιδεώδες).

β) Αν $a = \cap_{i=1}^{n} q_i$ μια ελάχιστη ανάλυση τού ιδεώδους a σε πρωταρχικά ιδεώδη, δείξτε τότε ότι $a[x] = \cap_{i=1}^{n} q_i[x]$ είναι μια ελάχιστη ανάλυση τού ιδεώδους $a[x]$ σε πρωταρχικά ιδεώδη.

*****Πρόβλημα 10.** Έστω $R = \mathbb{C}[x, y]/I$, όπου $I =< x^2, xy >$.
α) Δείξτε ότι τα ιδεώδη $< \bar{x} >$ και $< \bar{y}^n >$ τού δακτύλίου R είναι πρωταρχικά και, επίσης, ότι $\bar{0} =< \bar{x} > \cap < \bar{y}^n >$ είναι μια ελάχιστη ανάλυση τού ιδεώδους $< \bar{0} >$ σε πρωταρχικά ιδεώδη για κάθε φυσικό αριθμό n.
β) Γενικότερα δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda \neq 0$ έχουμε ότι $\bar{0} =< \bar{x} > \cap < \bar{x} + \lambda \bar{y}^n >$ είναι μια ελάχιστη ανάλυση τού ιδεώδους $< \bar{0} >$ σε πρωταρχικά ιδεώδη.