ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2006-07
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Έστω I ιδεώδες δακτυλίου R. Δείξτε ότι
α) Το $\mathrm{Rad}I$ είναι ιδεώδες τού R.
β) Το $\mathrm{Rad}\mathrm{Rad}I = \mathrm{Rad}I$.

***Πρόβλημα 2.** Έστω R δακτύλιος και a στοιχείο του.
α) Δείξτε ότι αν το $a \neq 0_R$ είναι μηδενοδύναμο, τότε είναι μηδενοδιαιρέτης.
β) Βρείτε τα μηδενοδύναμα στοιχεία των δακτυλίων $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{10}$.
γ) Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R έχει μοναδιαίο στοιχείο το 1_R και έστω a κάποιο μηδενοδύναμο στοιχείο του. Δείξτε ότι το στοιχείο $1_R + a$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού R.

***Πρόβλημα 3.** **α)** Υπάρχει, μη μηδενικός, ομομορφισμός δακτυλίων από το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων;
β) Υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων από τον δακτύλιο $2\mathbb{Z}$ στον δακτύλιο $3\mathbb{Z}$;

****Πρόβλημα 4.** Δείξτε ότι κάθε ακέραια περιοχή με πεπερασμένο πλήθος ιδεωδών είναι σώμα.

****Πρόβλημα 5.** Έστω R δακτύλιος γιά τον οποίο ισχύει ότι κάθε υποδακτύλιός του είναι και ιδεώδες. Δείξτε ότι $R = 0$ ή $R = \mathbb{Z}$ ή $R = \mathbb{Z}_n$. Αν όμως υποθέσουμε ότι ο δακτύλιος δεν έχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε υπάρχουν και άλλοι δακτύλιοι που ικανοποιούν την δοθείσα συνθήκη, πέραν των παραπάνω.

****Πρόβλημα 6.** Έστω R δακτύλιος.
α) Δείξτε ότι το σύνολο $N(R) = \{a \in R,\ \ a^n = 0$ γαι κάποιον φυσικό αριθμό $n\}$ είναι ιδεώδες τού R.
β) Έστω $\mathbb{Z}_m$ ο δακτύλιος των ακεραίων $\bmod m$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(A) $N(\mathbb{Z}_m) = 0$.
(B) O m δεν διαιρείται από το τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού.
Υπόδειξη: Κάνετε χρήση της ανάλυσης τού m σε πρώτους αριθμούς.

****Πρόβλημα 7.** Δείξτε ότι τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_{10}[x]$ είναι τα σταθερά πολυώνυμα τα οποία θεωρούμενα ως στοιχεία τού $\mathbb{Z}_{10}$ είναι αντιστρέψιμα. (*Υπόδειξη:* Ορίσατε φυσιολογικούς ομομορφισμούς δακτυλίων $\phi : \mathbb{Z}_{10}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_5[x]$ και $\psi : \mathbb{Z}_{10}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[x]$).

*****Πρόβλημα 8** Θεωρούμε τον δακτύλιο $R[x]$ των πολυωνύμων μεταβλητής x με συντελεστές από τον δακτύλιο R και έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$. Δείξτε ότι:

α) Το $f(x)$ είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν το a_0 είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού R και τα $a_1, \ldots, a_n$ είναι μηδενοδύναμα στοιχεία R (*Υπόδειξη:* Κάνετε χρήση τού προβλήματος 2γ).
β) Το $f(x)$ είναι μηδενοδύναμο, αν και μόνον αν, όλοι οι συντελεστές του είναι μηδενοδύναμα στοιχεία τού R.

*****Πρόβλημα 9.** Δείξτε ότι ο (μή αντιμεταθετικός) δακτύλιος $M_2(\mathbb{Q})$ των 2×2 πινάκων με στοιχεία στους ρητούς αριθμούς δεν έχει άλλα ιδεώδη εκτός των προφανών (δηλ. $I = \{0\}$ και $I = M_2(\mathbb{Q})$) (*Υπόδειξη:* Αν $I \neq \{0\}$ τότε για να δείξετε ότι $I = M_2(\mathbb{Q})$ αρκεί να δείξετε ότι περιέχει κάποιο αντιστρέψιμο στοιχείο). Ισχύει το ίδιο για τον δακτύλιο $M_2(\mathbb{Z})$ των 2×2 πινάκων με στοιχεία στους ακέραιους αριθμούς; *Σημείωση:* Σε έναν μήν αντιμεταθετικό δακτύλιο R, ένα υποσύνολό του I είναι ιδεώδες, αν είναι υποομάδα και επιπλέον για κάθε $r \in R$ και $a \in I$ ισχύει ότι $ra \in I$ και $ar \in I$.