ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2008-09
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #10

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

* **Πρόβλημα 1.** Εστω I ριζικό ιδεώδες δακτυλίου R το οποίο έχει ανάλυση σε primary ιδεώδη. Δείξτε τότε ότι $\mathrm{ass}(I) = \min(I)$ δηλ. κάθε ιδεώδες στο σύνολο $\mathrm{ass}(I)$ είναι minimal.

* **Πρόβλημα 2.** Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$ θεωρούμε το μέγιστο ιδεώδες του $\mathbf{m} = (2, x)$.
α) Δείξτε ότι το ιδεώδες $I = (4, x)$ είναι $\mathbf{m}$-primary.
β) Δείξτε ότι το I δεν είναι της μορφής $\mathbf{m}^n$, $n \in \mathbb{N}$ (γινόμενο τού $\mathbf{m}$ με τον εαυτό του n φορές).

***Πρόβλημα 3.** Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$.
α) Δείξτε ότι $(4, 2x, x^2) = (4, x) \cap (2, x^2)$.
β) Δείξτε ότι τα ιδεώδη $(4, x)$ και $(2, x^2)$ είναι primary ιδεώδη. (*Υπόδειξη:* Θεωρήστε γνωστό ότι το $(2, x)$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$).
γ) Δείξτε ότι η ανάλυση $(4, 2x, x^2) = (4, x) \cap (2, x^2)$ είναι ελάχιστη primary ανάλυση (minimal primary decomposition) τού ιδεώδους $(4, 2x, x^2)$.

** **Πρόβλημα 4.** Στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y, z]$ θεωρούμε τα ιδεώδη $I = (x, y)$, $J = (y, z)$, $K = (x, y, z)^2$.
α) Δείξτε ότι η $IJ = I \cap J \cap K$ είναι μια ελάχιστη (minimal) ανάλυση τού IJ σε primary (πρωταρχικά) ιδεώδη.
β) Δείξτε, επίσης, ότι τα ιδεώδη I, J εμφανίζονται σε κάθε άλλη ελάχιστη ανάλυση τού IJ σε primary (πρωταρχικά) ιδεώδη.

** **Πρόβλημα 5.** Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y, z]$ και έστω $I =< xy, x - yz >$.
α) Βρείτε το $\mathrm{Rad}(I)$.
β) Γράψτε το $\mathrm{Rad}(I)$ ως τομή πρώτων ιδεωδών.
γ) Βρείτε μια ελάχιστη ανάλυση τού I σε primary (πρωταρχικά) ιδεώδη.

** **Πρόβλημα 6.** Θεωρούμε το ιδεώδες $I =< x^2y^3,\ x + y + 1 >$ τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y]$.
α) Βρείτε μια ελάχιστη ανάλυση τού I σε πρωταρχικά ιδεώδη (minimal primary decomposition).
β) Βρείτε το ιδεώδες $\mathrm{Rad}(I)$ (δηλ. βρείτε τούς γεννήτορές του).

** **Πρόβλημα 7.** Θεωρούμε το ιδεώδες $I =< x^2, xy > \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$. Δείξτε ότι
α) $I =< x > \cap < x^2, xy, y^2 >=< x > \cap < x^2, y >$ είναι δύο διαφορετικές ελάχιστες αναλύσεις τού ιδεώδους I σε primary ιδεώδη.
β) Για κάθε $a \in \mathbb{Q}$ δείξτε ότι $I =< x > \cap < x^2, y - ax >$ είναι μια ελάχιστη ανάλυση τού ιδεώδους I σε primary ιδεώδη. Συνεπώς, το I έχει άπειρες το πλήθος διαφορετικές

ελάχιστες αναλύσεις σε primary ιδεώδη.