ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2008-09
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #10 - ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 5, 6, 7

Πρόβλημα 5 - Λύση: Τα ερωτήματα α), β) απαντήθηκαν στην τάξη. Για το ερώτημα γ): Διαιρούμε το xy με το $x-yz$ (ως προς την μεταβλητή x). Είναι $xy = (x-yz)y+y^2z$. Επομένως $I =< xy, x-yz >=< y^2z, x-yz >$. Ισχυρισμός:

$$I =< y^2, x-yz > \cap < z, x-yz >$$

Έστω επομένως $J_1 =< y^2, x-yz >$ και $J_2 =< z, x-yz >=< z, x >$. Έχουμε ότι το J_2 είναι πρώτο άρα primary. Επίσης $\mathbb{C}[x,y,z]/J_1 \cong \mathbb{C}[y,z]/ < y^2 >$ (διαίρεση με το $x-yz$ ως προς την μεταβλητή x). Στον δακτύλιο $\mathbb{C}[y,z]/ < y^2 >$ κάθε διαιρέτης τού μηδενός είναι nilpotent: Έστω $\bar{f}, \bar{g} \neq \bar{0}$ με $\bar{f}\bar{g} = \bar{0}$. Τότε $y^2 \mid fg$ άρα $y \mid f$ και $y \mid g$ άρα $y^2 \mid f^2$ και $y^2 \mid g^2$ άρα $\bar{f}^2 = \bar{0}$ και $\bar{g}^2 = \bar{0}$. Επομένως και το J_1 είναι primary (με $\mathrm{Rad}(J_1) =< x, y >$).

Δείχνουμε τώρα ότι $I = J_1 \cap J_2$. Προφανώς $I \subseteq J_1, J_2$. Έστω $f(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$. Διαιρώντας το με το $x-yz$ (ως προς την μεταβλητή x) έχουμε

$$f(x,y,z) = q(x,y,z)(x-yz) + f_1(y,z). \tag{1}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $f \in J_1 \cap J_2$. Επειδή $x-yz \in J_1 \cap J_2$ θα πρέπει $f_1(y,z) \in J_1 \cap J_2$. Ότι $f_1(y,z) \in J_1$ συνεπάγεται

$$f_1(y,z) = g_1(x,y,z)y^2 + g_2(x,y,z)(x-yz) \tag{2}$$

θέτοντας $x = yz$ στην (2), παίρνουμε ότι

$$f_1(y,z) = g_1(yz,y,z)y^2 = g(y,z)y^2 \text{ όπου } g(y,z) := g_1(yz,y,z) \tag{3}$$

Ότι $f_1(y,z) \in J_2$ συνεπάγεται επομένως ότι $g(y,z)y^2 = h_1(x,y,z)z+h_2(x,y,z)x$. Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε $g(y,z)y^2 = h_1(0,y,z)z = h(y,z)z$, όπου $h(y,z) := h_1(0,y,z)$. Επειδή $(y^2, z) = 1$ συνάγουμε ότι $z \mid g(y,z)$ άρα $g(y,z) = g'(y,z)z$. Επομένως $g(y,z)y^2 = g'(y,z)zy^2$. Αντικαθιστώντας την έκφραση τού $g(y,z)$ στην σχέση (3) έχουμε $f_1(y,z) = g'(y,z)zy^2$. Αντικαθιστώντας τέλος την παραπάνω έκφραση τού $f_1(y,z)$ στην σχέση (1) συνάγουμε $f(x,y,z) = q(x,y,z)(x-yz) + g'(y,z)zy^2 \in I$.

Η παραπάνω ανάλυση εύκολα δείχνουμε ότι είναι και ελάχιστη.

Πρόβλημα 6 - Λύση: α) Διαιρούμε το x^2y^3 με το $x+y+1$ (ως προς την μεταβλητή x). Παίρνουμε $x^2y^3 = (x+y+1)(xy^3 - y^4 - y^3) + y^3(y+1)^2$. Επομένως $I =< y^3(y+1)^2, x+y+1 >$. Ισχυρισμός:

$$I =< y^3, x+y+1 > \cap < (y+1)^2, x+y+1 >$$

Έστω λοιπόν $J_1 =< y^3, x+y+1 >$ και $J_2 =< (y+1)^2, x+y+1 >$. Είναι $\mathrm{Rad}(J_1) =< x, y >$ και $\mathrm{Rad}(J_2) =< x, y+1 >$ μέγιστα ιδεώδη τού $\mathbb{C}[x,y]$ άρα τα J_1, J_2 είναι primary.

Δείχνουμε τώρα ότι $I = J_1 \cap J_2$. Προφανώς $I \subseteq J_1, J_2$. Έστω $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. Διαιρώντας το με το $x+y+1$ (ως προς την μεταβλητή x) έχουμε

$$f(x,y) = q(x,y)(x+y+1) + f_1(y). \tag{4}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $f \in J_1 \cap J_2$. Επειδή $x+y+1 \in J_1 \cap J_2$ θα πρέπει $f_1(y) \in J_1 \cap J_2$. Ότι $f_1(y) \in J_1$ συνεπάγεται

$$f_1(y) = g_1(x,y)y^3 + g_2(x,y)(x+y+1) \tag{5}$$

Θέτοντας $x = -y-1$ η σχέση (5) γίνεται

$$f_1(y) = g_1(-y-1, y)y^3 = g(y)y^3, \text{ όπου } g(y) := g_1(-y-1, y) \tag{6}$$

Ότι $f_1(y) \in J_2$ συνεπάγεται επομένως ότι $g(y)y^3 = h_1(x,y)(y+1)^2 + h_2(x,y)(x+y+1)$. Θέτοντας πάλι $x = -y-1$ παίρνουμε ότι $g(y)y^3 = h_1(-y-1,y)(y+1)^2$, δηλ. $g(y)y^3 = h(y)(y+1)^2$, όπου $h(y) := h_1(-y-1, y)$. Επειδή $(y^3, (y+1)^2) = 1$ συνάγουμε ότι $(y+1)^2 \mid g(y)$ δηλ. $g(y) = g'(y)(y+1)^2$. Αντικαθιστώντας την έκφραση τού $g(y)$ στην σχέση (6) παίρνουμε $f_1(y) = g'(y)y^3(y+1)^2$. Αντικαθιστώντας την έκφραση τού $f_1(y)$ στην σχέση (4) παίρνουμε $f(x,y) = q(x,y)(x+y+1) + g'(y)y^3(y+1)^2 \in I$.

Η παραπάνω ανάλυση εύκολα δείχνουμε ότι είναι και ελάχιστη.

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\mathrm{Rad}(I) =< x, y > \cap < x, y+1 >$. Υπενθυμίζουμε ότι αν I_1, I_2 ιδεώδη δακτυλίου R με $I_1 + I_2 = R$ τότε $I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$. Στην περίπτωσή μας προφανώς έχουμε $< x, y > + < x, y+1 >= \mathbb{C}[x,y]$ διότι $1 = (y+1) - y \in < x, y > + < x, y+1 >$. Άρα $\mathrm{Rad}(I) =< x, y > \cap < x, y+1 >=< x, y >< x, y+1 >=< x^2, x(y+1), xy, y(y+1) >=< x, y(y+1) >$.

Πρόβλημα 7 - Λύση: Το **α)** το κάναμε ως παράδειγμα στην τάξη. Για το έρώτημα **β)**: Το $< x >$ είναι πρώτο άρα και primary. Επίσης $\mathrm{Rad}(< x^2, y - ax >) =< x, y >$ μέγιστο τού $\mathbb{Q}[x, y]$ άρα είναι primary.

Προφανώς έχουμε $< x^2, xy >\subseteq< x > \cap < x^2, y - ax >$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό (για $a = 0$ το αποδείξαμε στο α) ερώτημα, συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \neq 0$): Έστω $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$. Τό διαιρώ με το x^2 και έχω $f(x, y) = q(x, y)x^2 + r(x, y)$ με $\deg_x r(x, y) \geq 1$. Συνεπώς $r(x, y) = r_1(y)x + r_2(y)$. Συνεπώς

$$f(x, y) = q(x, y)x^2 + r_1(y)x + r_2(y) \tag{7}$$

Εστω τώρα ότι $f(x, y) \in< x > \cap < x^2, y-ax >$. Επειδή $x^2 \in< x > \cap < x^2, y-ax >$ θα πρέπει $r_1(y)x + r_2(y) \in< x > \cap < x^2, y - ax >$. Ότι $r_1(y)x + r_2(y) \in< x >$ συνεπάγεται ότι $r_1(y)x + r_2(y) = h(x, y)x$. Θέτοντας $x = 0$ συνάγουμε ότι $r_2(y) = 0$. Επομένως θα έχουμε $r_1(y)x \in< x^2, y-ax >$. Άρα $r_1(y)x = g_1(x, y)x^2 + g_2(x, y)(y-ax)$. Θέτοντας $x = y/a$ έχουμε $r_1(y)y/a = g_1(y/a, y)y^2/a^2$ δηλ. $ar_1(y) = g(y)y$, όπου $g(y) = g_1(y/a, y)$. Συνεπώς $y \mid r_1(y)$ και άρα $r_1(y) = r_1'(y)y$. Αντικαθιστώντας την έκφραση τού $r_1(y) = r_1'(y)y$ και τού $r_2(y) = 0$ στην σχέση (7) παίρνουμε $f(x, y) = q(x, y)x^2 + r_1'(y)xy \in I$.

Η παραπάνω ανάλυση εύκολα δείχνουμε ότι είναι και ελάχιστη.