ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2006-07
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Εστω $\phi : R \longrightarrow S$ επιμορφισμός δακτυλίων και έστω I ιδεώδες τού R.
α) Δείξτε ότι το $\phi(I)$ είναι ιδεώδες τού S.
β) Εστω $\ker\phi \subseteq I$. Δείξτε ότι το I είναι πρώτο ιδεώδες τού R εάν και μόνον εάν το $\phi(I)$ είναι πρώτο ιδεώδες τού S.

***Πρόβλημα 2.** *α)* Έστω ότι ο δακτύλιος R έχει ένα ιδεώδες $I \neq R$ με την ιδιότητα ότι κάθε $a \in R \backslash I$ (δηλ. $a \in R$ με $a \notin I$) είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού R. Δείξτε τότε ότι το ιδεώδες I είναι μέγιστο ιδεώδες τού R και, επιπλέον, ότι ο δακτύλιος R δεν έχει άλλο μέγιστο ιδεώδες εκτός τού I.
β) Έστω ότι ο δακτύλιος R έχει ένα μέγιστο ιδεώδες J με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in J$ το στοιχείο $1 + x$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού R. Δείξτε τότε ότι το J είναι το μοναδικό μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου R.

****Πρόβλημα 3.** Εστω R δακτύλιος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
i) Ο R έχει ακριβώς ένα πρώτο ιδεώδες.
ii) Κάθε στοιχείο του R είναι αντιστρέψιμο ή nilpotent (μηδενοδύναμο).

****Πρόβλημα 4.** Βρείτε τα πρώτα και τα μέγιστα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbf{Z}_{12}$.

****Πρόβλημα 5** Εστω $I =< x^4 + x, 5\text{mod}6\, x^2 >$ ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_6[x]$.
α) Δείξτε ότι $I \neq \mathbb{Z}_6[x]$.
β) Δείξτε ότι το I είναι κύριο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}_6[x]$.
γ) Δείξτε ότι το I δεν είναι μέγιστο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}_6[x]$.

****Πρόβλημα 6** Βρείτε τον πυρήνα τού ομομορφισμού δακτυλίων $\phi : \mathbf{R}[x, y] \longrightarrow \mathbf{R}[x]$ που ορίζεται από $\phi(f(x, y)) = f(x, x)$.

****Πρόβλημα 7.** Συμβολίζουμε ως $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ τον δακτύλιο των πολυωνύμων με μεταβλητές τα $x_1, \ldots, x_n$ και συντελεστές από τούς μιγαδικούς αριθμούς. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων $\Phi : \mathbb{C}[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]$ που ορίζεται ως $\Phi(f(x, y, z)) = f(x, y, iy)$.
α) Δείξτε ότι ο Φ είναι επιμορφισμός δακτυλίων και βρείτε τον πυρήνα του.
β) Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x^2 - y^2 - 1 >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y]$.
γ) Δείξτε ότι το ιδεώδες $I =< x^2 + y^2 + 2z^2 - 1, y + iz >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y, z]$.

*****Πρόβλημα 8** Εστω $\mathbb{Z}[i] = \{n + mi,\ n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

α) Δείξτε ότι ο $\mathbb{Z}[i]$ είναι δακτύλιος (ονομάζεται ο δακτύλιος των ακεραίων τού Gauss).
β) Έστω p ενας πρώτος αριθμός. Ορίζουμε τον επιμορφισμό δακτυλίων $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$ με $\phi(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{f}(i)$. Δείξτε ότι ο πυρήνας τού ϕ είναι το ιδεώδες (x^2+1).
γ) Δείξτε ότι ο ϕ επάγει επιμορφισμό δακτυλίων $\bar{\phi} : \mathbb{Z}_p[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]/(p)$. Γράψτε τον τύπο γιά τον $\bar{\phi}$ (δείξτε ότι είναι καλά ορισμένος) και δείξτε ότι ο πυρήνας τού $\bar{\phi}$ είναι το ιδεώδες $(x^2+\bar{1})$ τού $\mathbb{Z}_p[x]$.
δ) Δείξτε ότι ο πρώτος αριθμός p είναι πρώτο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]$ εάν και μόνον εάν το πολυώνυμο $x^2+\bar{1}$ είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_p[x]$.

*****Πρόβλημα 9. Πρόβλημα 4.** Εστω $\mathcal{C}([0,1])$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το διάστημα $[0,1]$ με τιμές στους πραγματικούς αριθμούς.
α) Δείξτε ότι το $\mathcal{C}([0,1])$ είναι δακτύλιος με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό συναρτήσεων.
β) Εστω $\gamma \in [0,1]$. Δείξτε ότι το $M_\gamma = \{f(x) \in \mathcal{C}([0,1]),\ f(\gamma)=0\}$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathcal{C}([0,1])$. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήσατε τον ομομορφισμό δακτυλίων $\phi : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\phi(f) = f(\gamma)$).
γ) Δείξτε ότι αν I είναι ένα μέγιστο ιδεώδες τού $\mathcal{C}([0,1])$ τότε $I = M_\gamma$, γιά κάποιο $\gamma \in [0,1]$. (*Υπόδειξη:* Αν όχι, τότε για κάθε $\gamma \in [0,1]$ υπάρχει $f_\gamma \in I$ με $f_\gamma(\gamma) \neq 0$).