ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2008-09
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Έστω $\mathbb{Z}[i]$ ο δακτύλιος των ακεραίων τού Gauss.
α) Βρείτε ένα μέγιστο κοινό διαιρέτη των $3+4i$ και $18-i$.
β) Γράψτε το ιδεώδες $< 11+7i, 18-i >$ ως κύριο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[i]$.
γ) Δείξτε ότι το ιδεώδες $< 13 >$ δεν είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]$.

***Πρόβλημα 2.** Έστω R μια ΠΚΙ και S μια ακέραια περιοχή που δεν είναι σώμα. Δείξτε ότι αν $\phi : R \longrightarrow S$ είναι ένας επιμορφισμός δακτυλίων, τότε είναι ισομορφισμός.

***Πρόβλημα 3.** Εστω R Ευκλείδεια περιοχή με στάθμη ν. Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι αν δύο στοιχεία $a, b \in R$ είναι συνεταιρικά τότε $\nu(a) = \nu(b)$. Δείξτε ότι δεν ισχύει, εν γένει, το αντίστροφο.

***Πρόβλημα 4.** **α)** Έστω R ένας δακτύλιος τής Noether και I ιδεώδες τού R. Δείξτε ότι ο δακτύλιος πηλίκων R/I είναι δακτύλιος τής Noether.
β) Δείξτε ότι ένας υποδακτύλιος ενός δακτυλίου τής Noether δεν είναι, εν γένει, δακτύλιος τής Noether .

****Πρόβλημα 5.** Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
α) Το πολυώνυμο $x^2 + \bar{1}$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_p[x]$ (ως $\bar{a}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_p$).
β) Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a, b με $p = a + b$ και $ab \equiv 1 \bmod p$.

****Πρόβλημα 6.** Έστω K σώμα και $K[[x]]$ τό σύνολο των τυπικών δυναμοσειρών τού x με συντελεστές από το K. Επομένως, κάθε στοιχείο τού $K[[x]]$ έχει την μορφή $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, χωρίς να μας ενδιαφέρουν θέματα σύγκλισης. Το παραπάνω σύνολο εφοδιάζεται με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό που ορίζονται όπως στα πολυώνυμα.
α) Δείξτε ότι το $K[[x]]$ είναι δακτύλιος.
β) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού $K[[x]]$.
γ) Δείξτε ότι κάθε μή μηδενικό ιδεώδες τού $K[[x]]$ έχει την μορφή $< x^n >$, $n \geq 0$.

****Πρόβλημα 7.** Έστω R ένας δακτύλιος τής Noether. Δείξτε ότι αν $\phi : R \longrightarrow R$ επιμορφισμός δακτυλίων τότε είναι αυτομορφισμός.

*****Πρόβλημα 8.** Δείξτε ότι αν κάθε πρώτο ιδεώδες ενός δακτυλίου R είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε ο R είναι δακτύλιος τής Noether.

*****Πρόβλημα 9.** Εστω R δακτύλιος.

α) Εστω Ω το σύνολο των ιδεωδών του R που δεν είναι κύρια. Αν $\Omega \neq \emptyset$, δείξτε ότι το Ω έχει μέγιστα στοιχεία.
β) Χρησιμοποιήστε το α) για να δείξετε ότι αν κάθε πρώτο ιδεώδες ενός δακτυλίου R είναι κύριο τότε και κάθε ιδεώδες του R είναι κύριο.
γ) Έστω R μια Π.Μ.Α. στην οποία κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο. Δείξτε ότι ο R είναι Π.Κ.Ι.