

**ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2008-09**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5**

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

**\*Πρόβλημα 1.** Εστω  $I = (x^2 + y^2 - 1, y - 1)$ . Βρείτε ένα πολυώνυμο  $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$  με την ιδιότητα  $F(x, y) \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) \setminus I$ .

**\*Πρόβλημα 2. α)** Βρείτε το αλγεβρικό σύνολο  $\mathbb{V}(y - x^2, z - x^3)$  τού  $\mathbb{C}^3$ .

**β)** Δείξτε ότι  $\mathbb{I}(\mathbb{V}(y - x^2, z - x^3)) = (y - x^2, z - x^3)$ .

**γ)** Χρησιμοποιώντας τα α) και β) δείξτε ότι το ιδεώδες  $(y - x^2, z - x^3)$  είναι πρώτο ιδεώδες.

**\*Πρόβλημα 3.** Πολλές από τις προτάσεις που ισχύουν όταν δουλεύουμε με το  $\mathbb{C}$  δεν ισχύουν όταν δουλεύουμε με το  $\mathbb{R}$ :

**α)** Δείξτε ότι αν  $F(x_1, \dots, x_n)$  είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  τότε το αλγεβρικό σύνολο  $V(F)$  είναι ανάγωγο. Βρείτε ένα ανάγωγο πολυώνυμο τού  $\mathbb{R}[x, y]$  για το οποίο το σύνολο  $\mathbb{V}(F)$  να μην είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο τού  $\mathbb{R}^2$ .

**β)** Στους μιγαδικούς έχουμε δεί ότι  $\mathbb{V}(I) = \emptyset$  εάν και μόνον εάν  $I = (1)$ . Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει όταν δουλεύουμε στους πραγματικούς.

**γ)** Βρείτε ιδεώδες  $I$  στο  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  για το οποίο έχουμε ότι  $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) \neq \text{Rad}I$ .

**\*\*Πρόβλημα 4. α)** Έστω  $S = \{P_1, \dots, P_r\}$  πεπερασμένο υποσύνολο τού  $\mathbb{C}^2$  και  $Q$  σημείο τού  $\mathbb{C}^2$  με  $Q \notin S$ . Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο  $F \in \mathbb{C}[x, y]$  με  $F(P_i) = 0$  για κάθε  $P_i \in S$  και  $F(Q) = 1$ .

**β)** Βρείτε αντιπαράδειγμα για τον παραπάνω ισχυρισμό στην περίπτωση που το  $S$  είναι άπειρο υποσύνολο τού  $\mathbb{C}^2$ .

**\*\*Πρόβλημα 5.** Εστω  $F(x, y), G(x, y)$  πολυώνυμα του  $\mathbb{C}[x, y]$  που είναι πρώτα μεταξύ τους. Δείξτε ότι το αλγεβρικό σύνολο  $\mathbb{V}(F, G)$  είναι πεπερασμένο. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι τα παραπάνω πολυώνυμα είναι πρώτα μεταξύ τους ως πολυώνυμα τού δακτυλίου  $K[y]$  όπου  $K = \mathbb{C}(y)$  το σώμα κλασμάτων τού δακτυλίου  $\mathbb{C}[y]$ ).

**\*\*Πρόβλημα 6.** Δείξτε ότι το παρακάτω υποσύνολο τού  $\mathbb{C}^2$  δεν είναι αλγεβρικό

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

**\*\*\*Πρόβλημα 7.** Θεωρούμε το ιδεώδες  $I = \langle xz - y^2, x^3 - yz \rangle$  τού δακτυλίου  $\mathbb{C}[x, y, z]$

**α)** Δείξτε ότι το  $I$  δεν είναι πρώτο ιδεώδες.

**β)** Γράψτε το αλγεβρικό σύνολο  $\mathbb{V}(I)$  ως πεπερασμένη ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων τού  $\mathbb{C}^3$ .