

**ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2008-09**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6**

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

**\*Πρόβλημα 1.** Εστω  $M$  ένα  $R$ -module και  $\phi : M \rightarrow M$  ένας  $R$ -module ομομορφισμός για τον οποίον ισχύει ότι  $\phi^2 = \phi$ . Δείξτε τότε ότι το  $R$ -module  $M$  είναι ισόμορφο με το  $R$ -module  $\ker\phi \oplus \operatorname{Im}\phi$  (εξωτερικό ευθύ άθροισμα).

**\*Πρόβλημα 2.** Εστω  $M, N$  δύο  $R$ -modules και  $\phi : M \rightarrow N$ ,  $\psi : N \rightarrow M$  ομομορφισμοί με  $\psi \circ \phi = 1_M$ . Δείξτε ότι  $N = \operatorname{Im}\phi \oplus \operatorname{Ker}\psi$ .

**\*Πρόβλημα 3.** α) Θεωρούμε τον δακτύλιο των πολυωνύμων  $K[x]$ . Δείξτε ότι ο  $K[x]$  είναι ένα  $K$ -module.

β) Θεωρούμε το ιδεώδες  $\langle x^2 + x \rangle$  του  $K[x]$ . Δείξτε ότι το  $\langle x^2 + x \rangle$  είναι ένα  $K$ -submodule του  $K[x]$  και ότι το  $K[x]/\langle x^2 + x \rangle$  είναι ένα ελεύθερο  $K$ -module διάστασης (τάξης) 2.

**\*\*Πρόβλημα 4.** Έστω  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $a_n \neq 0$ , ένα μή μηδενικό πολυώνυμο.

α) [Μονάδες 8] Αν  $a_n = \pm 1$  δείξτε ότι το  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}[x]/\langle f \rangle$  είναι ελεύθερο (free). Βρείτε την διάστασή του.

β) [Μονάδες 12] Αν  $a_n \neq \pm 1$  δείξτε ότι το  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}[x]/\langle f \rangle$  δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

**\*\*Πρόβλημα 5.** Εστω  $M$  ένα π.π.  $R$ -module και  $\phi : M \rightarrow R^n$  ένας  $R$ -module επιμορφισμός. Δείξτε ότι ο πυρήνας  $\operatorname{Ker}\phi$  είναι ένα π.π.  $R$ -module.

**\*\*Πρόβλημα 6.** Δείξτε ότι αν για κάποιον δακτύλιο  $R$  ισχύει ότι κάθε κυκλικό  $R$ -module είναι ελεύθερο, τότε ο  $R$  είναι σώμα.

**\*\*\*Πρόβλημα 7.** α) Έστω  $R$  μια ακέραια περιογή που περιέχει τον δακτύλιο  $\mathbb{R}[x]$ . Δείξτε ότι αν ο  $R$  ένα π.π.  $\mathbb{R}[x]$ -module τότε είναι ελεύθερο (free)  $\mathbb{R}[x]$ -module.

β) Έστω  $R = \mathbb{R}[x, y]/\langle x^2 - y^3 \rangle$  και  $t = x^n y^m$  για κάποιους θετικούς ακέραιους  $n, m$ . Δείξτε ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος  $\mathbb{R}[t]$  μπορεί να θεωρηθεί ως υποδακτύλιος του  $R$  και επίσης ότι ο  $R$  ως  $\mathbb{R}[t]$ -module είναι (free). Δείξτε ότι η διάσταση του  $R$  είναι  $3n + 2m$ .

**\*\*\* Πρόβλημα 8.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος και  $M$  ένα π.π.  $R$ -module. Αν  $\phi : M \rightarrow M$  είναι ένας  $R$ -module επιμορφισμός δείξτε ότι είναι ισομορφισμός. (Υπόδειξη: το  $M$  μπορεί να θεωρηθεί ως  $R[t]$ -module ( $t$ =μεταβλητή). Πάρτε το ιδεώδες  $I = (t) \in R[t]$ ).