ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2008-09
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #8

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Έστω $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{m + n\sqrt{5}, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$. Δείξτε ότι το $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ είναι δακτύλιος και μάλιστα ακέραια περιοχή. Έστω F το σώμα κλασμάτων του. Θεωρούμε το στοιχείο $a = (1 + \sqrt{5})/2 \in F$. Δείξτε ότι το a είναι ακέραιο πάνω από τον $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

***Πρόβλημα 2.** Εστω $K \subseteq L$ σώματα. Δείξτε ότι το σύνολο των στοιχείων $\mathcal{O}_{L|K}$τού L που είναι ακέραια πάνω από το K είναι υπόσωμα τού L.

***Πρόβλημα 3.** Εστω $K \subseteq L$ σώματα. Έστω ότι τα $v_1, \cdots, v_n \in L$ είναι ακέραια πάνω από το K. Δείξτε τότε ότι αν R είναι δακτύλιος με $K \subseteq R \subseteq k[v_1, \cdots, v_n]$ τότε ο R είναι σώμα.

***Πρόβλημα 4.** Εστω $R \subseteq S \subseteq T$. Υποθέτουμε ότι κάθε στοιχείο τού T είναι ακέραιο πάνω από τον S και ότι κάθε στοιχείο τού S είνα ακέραιο πάνω από τον R. Δείξτε τότε ότι κάθε στοιχείο τού T είναι ακέραιο πάνω από τον R.

****Πρόβλημα 5.** Εστω $K \subseteq L$ σώματα και $\mathcal{O}_{L|K}$ το υπόσωμα του L όπως στο πρόβλημα 2.
α) Δειξτε ότι αν ένα στοιχείο του L είναι ακέραιο πάνω απο το $\mathcal{O}_{L|K}$ τότε είναι ακέραιο και πάνω απο το K.
β) Εστω ότι το L είναι, ειδικότερα, ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα δηλ. κάθε πολυώνυμο $f(x) \in k[x]$ με $\deg f(x) = n$ γράφεται ως $f(x) = c \sqcap_{i=1}^{n} (x - a_i)$ όπου $c, a_i \in K$. Δείξτε τότε ότι αν f, g είναι μονικά πολυώνυμα του $L[x]$ με $fg \in \mathcal{O}_{L|K}[x]$, τότε τα f, g θα είναι πολυώνυμα στο $\mathcal{O}_{L|K}[x]$. (*Υπόδειξη:* εφαρμόστε το **α)**).

****Πρόβλημα 6.** Εστω $K \subseteq L$ σώματα και $\mathcal{O}_{L|K}$, όπως στο πρόβλημα 2. Δείξτε ότι το σύνολο των στοιχείων του δακτυλίου $L[x]$ που είναι ακέραια πάνω από τον δακτύλιο $K[x]$ είναι ακριβώς ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{L|K}[x]$, δηλ. $\mathcal{O}_{L[x]|K[x]} = \mathcal{O}_{L|K}[x]$. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το πρόβλημα 5).

*****Πρόβλημα 7.** Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα π.π. $R-$module. Αν $\phi : M \longrightarrow M$ είναι ένας $R-$module επιμορφισμός δείξτε ότι είναι ισομορφισμός. (Υπόδειξη: το M μπορεί να θεωρηθεί ως $R[t]-$module (t =μεταβλητή). Πάρτε το ιδεώδες $I = (t) \in R[t]$).