ΑΛΓΕΒΡΑ Ι-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2008-09
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #9

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Έστω $\phi : R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων. Δείξτε ότι αν I πρωταρχικό (primary) ιδεώδες τού S τότε το $\phi^{-1}(I)$ είναι πρωταρχικό ιδεώδες τού R.

***Πρόβλημα 2.** Έστω $\mathbb{Z}[i]$ ο δακτύλιος των ακεραίων τού Gauus. Γράψτε το ιδεώδες $< 8 + 4i >$ ως τομή πρωταρχικών (primary) ιδεωδών.

***Πρόβλημα 3.** Εστω A υποδακτύλιος ενός δακτυλίου B με τον B ακέραιο πάνω από τον A (δηλ. κάθε στοιχείο του B είναι ακέραιο πάνω από τον A). Δείξτε ότι αν $a \in A$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο θεωρούμενο ως στοιχείο του δακτυλίου B (δηλ. υπάρχει $b \in B$ με $ab = 1$), τότε είναι και αντιστρέψιμο στοιχείο στον δακτύλιο A (δηλ. $b \in A$).

****Πρόβλημα 4.** Έτσω $R \subseteq S$ δακτύλιοι με S ακέραια περιοχή. Υποθέτουμε ότι ο S είναι ακέραιος πάνω από τον R, δηλ. κάθε στοιχείο τού S είναι ακέραιο πάνω από το R. Δείξτε ότι αν $I \neq \{0\}$ ιδέωδες τού S τότε $I \cap R \neq \{0\}$.

****Πρόβλημα 5.** **α)** Έστω M πεπερασμένα παραγόμενο R-module και I ιδεώδες τού R με $IM = M$. Δείξτε τότε ότι υπάρχει $a \in I$ με την ιδιότητα $(1 + a)M = 0$.
β) Έστω I ιδεώδες δακτυλίου R με $I^2 = I$. Δείξτε ότι υπάρχει $a \in I$ τέτοιο ώστε $I =< a >$.

****Πρόβλημα 6.** Έστω $I =< x^2, xy, y^2 >\subseteq \mathbb{C}[x, y]$.
α) Δείξτε ότι το I είναι πρωταρχικό (primary) ιδεώδες.
β) Δείξτε ότι το I δεν είναι ανάγωγο ιδεώδες.