ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Γράψτε τον τύπο τής Ευκλείδειας διαίρεσης τού a διά τού b στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $a = -327$, $b = 12$.
β) $a = 453$, $b = -8$.
γ) $a = -372$, $b = -11$.

Πρόβλημα 2. Βρείτε τον d = μ.κ.δ.$(1147, 851)$. Γράψτε τον d στην μορφή $d = 1147\,\kappa + 851\,\lambda$ γιά κάποιους ακέραιους κ, λ.

Πρόβλημα 3. Έστω a ένας περιττός ακέραιος.
α) Δείξτε ότι το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού a^2 διά τού 4 ισούται με 1.
β) Δείξτε ότι το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού a^2 διά τού 8 ισούται με 1.

Πρόβλημα 4. Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι υπάρχουν ακέραιοι x, y με $ax + by = c$ αν και μόνον αν μ.κ.δ.$(a, b) \mid c$.

Πρόβλημα 5. Εστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
α) Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.(a, c) = μ.κ.δ.$(b, c) = 1$ τότε μ.κ.δ.$(ab, c) = 1$.
β) Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(a, c) = 1$ και μ.κ.δ.$(b, c) = d$ τότε μ.κ.δ.$(ab, c) = d$.

Πρόβλημα 6. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(5n + 1, 21n + 4) = 1$.

Πρόβλημα 7. Εστω $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$.
α) Αν $k \neq 0$, δείξτε ότι μ.κ.δ.$(ka, kb) = |k|$ μ.κ.δ.(a, b).
β) Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(a, c) = d, a|b$ και $c|b$ τότε $ac|bd$.
γ) Αν μ.κ.δ.$(b, c) = 1$ δείξτε ότι μ.κ.δ.(ab, c) = μ.κ.δ.(a, c).
δ) Αν μ.κ.δ.$(ab, c) = 1$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(a, c) = 1$ και μ.κ.δ.$(b, c) = 1$.

Πρόβλημα 8. Εστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με μ.κ.δ.$(m, n) = 1$. Δείξτε ότι μ.κ.δ.$(m + n, m - n) = 1$ ή 2.

Πρόβλημα 9. **α)** Εστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq 1$. Δείξτε ότι $2^n - 1|2^{nm} - 1$. Συμπεράνατε ότι αν $2^n - 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε και ο n είναι πρώτος.
β) Εστω $k, r \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $2^{2^r} + 1|2^{2^r(2k+1)} + 1$. Συμπεράνατε ότι αν ο $2^n + 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε το n είναι μιά δύναμη τού 2.

Πρόβλημα 10. Εστω $m, n \in \mathbb{N}$.
α) Δείξτε ότι αν το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού m με το n είναι r, δηλ. $m = qn + r$ με $0 \leq r < n$, τότε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού $2^m - 1$ με τον $2^n - 1$ είναι $2^r - 1$. (*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι το $2^{qn} - 1$ είναι πολλαπλάσιο τού $2^n - 1$).
β) Βασιζόμενοι στην εύρεση τού μ.κ.δ. με χρήση τού Ευκλείδειου αλγορίθμου, δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(m, n) = d$ τότε μ.κ.δ.$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^d - 1$.

Πρόβλημα 11. Χρησιμοποιήσατε την Ευκλείδεια διαίρεση για να δείξετε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 1$ γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων τού 2, δηλ. $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}$, για κάποιους φυσικούς k_i με $0 \leq k_s \leq \ldots \leq k_2 \leq k_1$.

Πρόβλημα 12. Βρείτε τον $d =$ μ.κ.δ.$(144, 625)$ χρησιμοποιόντας ι) την Ευκλείδεια διαίρεση και ιι) την ανάλυση των 144 και 625 σε πρώτους αριθμούς.

Πρόβλημα 13. **α)** Εστω p πρώτος αριθμός και $a \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι αν $p|a^2$ τότε $p|a$. Ισχύει το ίδιο αν ο p δεν είναι πρώτος αριθμός;
β) Εστω $m, n \in \mathbb{N}$ με μ.κ.δ.$(m, n) = 1$. Υποθέτουμε ότι $mn = k^2$, γιά κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $m = a^2$ και $n = b^2$. Ισχύει το ίδιο αν βγάλουμε την υπόθεση μ.κ.δ.$(m, n) = 1$;

Πρόβλημα 14. Υπολογίστε συναρτήσει τού φυσικού αριθμού n το πλήθος των συνόλων $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$ με την ιδιότητα μ.κ.δ.$(a, b) = 1$ και $ab = 10^{n+1}30^n$.

Πρόβλημα 15. **α)** Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι:
i) Αν μ.κ.δ.$(a, b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a + b, a - b) = 1$ ή 2.
ii) Ἀν μ.κ.δ.$(a, b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a - b, a^2 + ab + b^2) = 1$ ή 3.
β) Για κάθε μιά από τις παρακάτω εξισώσεις, βρείτε όλες τίς λύσεις της x, y που είναι φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το ερώτημα α) και το θεώρημα ανάλυσης σε πρώτους αριθμούς).

1. $x^2 - y^2 = 135$
2. $x^2 - y^2 = 72$
3. $x^3 - y^3 = 721$
4. $x^3 - y^3 = 3087$