

ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 11

Πρόβλημα 1. α) Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής \mathbb{Z}_{30} που έχει ως γεννήτορα το $\overline{25}$;
β) Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής \mathbb{Z}_{42} που έχει ως γεννήτορα το $\overline{30}$;

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι αν το p είναι πρώτος αριθμός τότε οι μόνες κυκλικές υποομάδες τής ομάδας \mathbb{Z}_p είναι η $\{0\}$ και η \mathbb{Z}_p .

Πρόβλημα 3. Βρείτε την κυκλική υποομάδα τής πολλαπλασιαστικής ομάδας των 4×4 αντιστρεψίμων πινάκων, την οποία παράγει (χωριστά) καθένας από τούς παρακάτω πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόβλημα 4. Εστω \mathbb{C}^* η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Βρείτε την τάξη των κυκλικών υποομάδων τής \mathbb{C}^* που παράγονται από τα στοιχεία: i , $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $1+i$. Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε όλους τούς γεννήτορες των κυκλικών υποομάδων.

Πρόβλημα 5. Έστω (G, \cdot) ομάδα και $g \in G$ στοιχείο τάξεως n .

α) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο, και a ακέραιος, ισοδυναμεί με το ότι ο a είναι πολλαπλάσιο τού n .

β) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = g^b$, όπου a, b ακέραιοι, ισοδυναμεί με το ότι ο $a - b$ είναι πολλαπλάσιο τού n .

Πρόβλημα 6. Στην ομάδα S_8 θεωρούμε την μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

α) Βρείτε την αντίστροφη μετάθεση σ^{-1} .

β) Βρείτε την τάξη $\text{ord}(\sigma)$ τής σ .

γ) Υπολογίστε την μετάθεση σ^{154} .

Πρόβλημα 7. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων τού συνόλου $\{\sigma \in S_5 \text{ με } \sigma(3) = 4\}$.

Πρόβλημα 8. Στην ομάδα S_8 βρείτε τις τροχιές τής μετάθεσης $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Γράψτε την σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και, επίσης, ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Πρόβλημα 9. Στην ομάδα S_6 εκφράστε κάθε μία από τις παρακάτω μεταθέσεις ως γινόμενο ξένων κύκλων:

α) $(13)(23)$.

β) $(16)(26)(36)(46)(56)$.

γ) $(12345)(16)$.

Πρόβλημα 10. Θεωρούμε την ομάδα S_n .

α) Εστω $s \leq n$. Βρείτε το αντίστροφο τού στοιχείου $(12 \dots s)$.

β) Εστω $\tau = (1234)$. Βρείτε την τάξη τού στοιχείου τ . Εκφράστε τα τ^2, τ^3 ως γινόμενα ξένων κύκλων.

γ) Ποιά είναι η τάξη τού στοιχείου $\gamma = (12345)(567)$