ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #12

Πρόβλημα 1. Εξετάστε αν η παρακάτω μετάθεση σ είναι άρτια ή περιττή:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 2. Στην ομάδα S_4, θεωρούμε το υποσύνολο $H = \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$.
α) Δείξτε ότι η H είναι υποομάδα τής S_4 και μάλιστα αβελιανή.
β) Γράψτε τα αριστερά σύμπλοκα τής H στην S_4.

Πρόβλημα 3. Έστω H υποομάδα τής ομάδας μεταθέσεων S_n, $n \geq 2$. Δείξτε ότι ή όλες οι μεταθέσεις τής H είναι άρτιες ή ακριβώς οι μισές από τις μεταθέσεις τής H είναι άρτιες και οι άλλες μισές περιττές.

Πρόβλημα 4. Στην ομάδα S_4 βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle (1324) \rangle$ και τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα τής H στην S_4.

Πρόβλημα 5. Στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle \bar{6} \rangle$ και τα αριστερά (που συμπίπτουν με τα δεξιά) σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{Z}_{18}$.

Πρόβλημα 6. Έστω ομάδα G, τής οποίας η τάξη είναι pq, όπου p, q πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα H τής G, με $H \neq G$, είναι κυκλική.

Πρόβλημα 7. Αποδείξτε ότι, αν μία ομάδα G έχει δύο, τουλάχιστον, στοιχεία και οι μόνες υποομάδες της είναι η G και η $\{e\}$, τότε η ομάδα είναι πεπερασμένη και η τάξη της είναι πρώτος αριθμός (*Υπόδειξη:* πάρτε ένα στοιχείο $a \neq e$ τής ομάδας και εξετάστε την κυκλική υποομάδα $< a >$).

Πρόβλημα 8. Εστω G ομάδα και H υποομάδα τής G με $(G : H) = 2$. Να αποδειχθεί ότι $a^2 \in H$, γιά κάθε $a \in G$.

Πρόβλημα 9. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε άν η απεικόνιση, που δίνεται, είναι ομομορφισμός. Στην περίπτωση που είναι ομομορφισμός βρείτε τιν πυρήνα του και την εικόνα του.

1. Ὁμάδες $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(n) = -2n$.
2. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = [x]$.
3. Ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τή σχέση $\phi(x) = |x|$.
4. Ομάδα $(G, \star)$ και $\phi : G \longrightarrow G$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(g) = g^{-1}$.
5. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = e^x$.

6. Ομάδες $(\mathbb{Z}_6,+),(\mathbb{Z}_2,+)$ και $\phi:\mathbb{Z}_6\longrightarrow\mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(a \bmod 6)= a \bmod 2$.
7. Ομάδες $(\mathbb{Z}_9,+),(\mathbb{Z}_2,+)$ και $\phi:\mathbb{Z}_9\longrightarrow\mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(a \bmod 9)= a \bmod 2$.
8. Ομάδες $(F,+),(\mathbb{R},+)$, όπου F το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και $\phi:F\longrightarrow\mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(f)=\displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Πρόβλημα 10. Έστω $\phi:G_1\longrightarrow G_2$ ομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι:
α) $\forall a\in G_1$ έχομε $\mathrm{ord}(\phi(a))\mid\mathrm{ord}(a)$.
β) Αν, επιπλέον ο ϕ είναι ισομορφισμός, τότε δείξτε ότι $\mathrm{ord}(\phi(a))=\mathrm{ord}(a)$.