

## ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

**Πρόβλημα 1.** Στο σύνολο  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  των φυσικών αριθμών ορίζουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$\mathcal{R}_1$ , με  $a\mathcal{R}_1b$  αν το  $a$  είναι πολλαπλάσιο τού  $b$ .

$\mathcal{R}_2$ , με  $a\mathcal{R}_2b$  αν το  $a = b - 1$ .

$\mathcal{R}_3$ , με  $a\mathcal{R}_3b$  αν το  $a$  έχει το ίδιο πλήθος ψηφίων με το  $b$ .

Βρείτε ποιές από τις σχέσεις είναι α) ανακλαστικές, β) συμμετρικές, γ) μεταβατικές.

**Πρόβλημα 2.** Βρείτε ποιές από τις παρακάτω σχέσεις στους πραγματικούς αριθμούς  $\mathbb{R}$  ορίζουν σχέσεις ισοδυναμίας. Για κάθε μιά από τις τελευταίες περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

α)  $\mathcal{R}_1$ , με  $x\mathcal{R}_1y$  αν  $x \geq y$ .

β)  $\mathcal{R}_2$ , με  $x\mathcal{R}_2y$  αν  $|x| = |y|$ .

γ)  $\mathcal{R}_3$ , με  $x\mathcal{R}_3y$  αν  $|x - y| \leq 3$ .

**Πρόβλημα 3.** Εστω  $\mathbb{Q}$  το σύνολο των ρητών αριθμών. Ορίζουμε  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ . Στο  $\mathbb{Q}^*$  ορίζουμε την σχέση  $\mathcal{R}$  ως εξής:

$$a\mathcal{R}b \iff a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

Ναδειχθεί ότι η  $\mathcal{R}$  είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρεθεί η κλάση ισοδυναμίας τού στοιχείου  $5/2 \in \mathbb{Q}^*$ .

**Πρόβλημα 4.** Στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε την σχέση  $\sim$  ως εξής:  $a \sim b \iff b - a \in \mathbb{R}$ , όπου  $\mathbb{R}$  το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε το σύνολο πηλίκων  $\mathbb{C}/\sim$ .

**Πρόβλημα 5.** Στο σύνολο  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , ορίζουμε την σχέση  $\sim$  ως εξής:  $a \sim b$  αν και μόνον αν τα  $a, b$  έχουν το ίδιο τελικό ψηφίο στο δεκαδικό σύστημα γραφής. Δείξτε ότι η  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε το σύνολο πηλίκων  $\mathbb{N}_0/\sim$ .

**Πρόβλημα 6.** Στο σύνολο  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ορίζουμε την σχέση  $\sim$  ως εξής:  $a \sim b$  αν και μόνον αν  $ab > 0$ . Δείξτε ότι η  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει αυτή η σχέση.

**Πρόβλημα 7.** Έστω  $\mathbb{Z}_m$  το σύνολο των ακεραίων modulo  $m$  τα στοιχεία τού οποίου τα έχουμε συμβολίσει ως  $\bar{a}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ . Βρείτε τον ακέραιο  $r$  με  $0 \leq r \leq m - 1$  για τον οποίο έχουμε:

α)  $\overline{126} = \bar{r}$  στο  $\mathbb{Z}_{12}$ .

β)  $\overline{-1} = \bar{r}$  στο  $\mathbb{Z}_{12}$ .

γ)  $\overline{-20} = \bar{r}$  στο  $\mathbb{Z}_8$ .

δ)  $\overline{-200} = \bar{r}$  στο  $\mathbb{Z}_9$ .

**Πρόβλημα 8.** Στο σύνολο  $A = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ , όπου  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , ορίζουμε την σχέση  $\sim$  ως εξής:  $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2) \iff m_1 + n_2 = m_2 + n_1$ .

**α)** Δείξτε ότι  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας.

**β)** Αποδείξτε ότι, για κάθε  $(m, n) \in A$  υπάρχει  $k \in \mathbb{N}_0$  τέτοιο ώστε  $(m, n) \sim (k, 0)$  είτε  $(m, n) \sim (0, k)$ .

**γ)** Περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει αυτή η σχέση.