ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Πρόβλημα 1. Για ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η $\star$ ορίζει διμελή πράξη;. Στην περίπτωση που ορίζεται πράξη εξετάστε αν αυτή είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική και αν έχει ουδέτερο στοιχείο.
α) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = a + b$
β) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = \frac{a}{b}$
γ) Στο σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με $a \star b = a^b$
δ) Στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ με $a \star b = a^b$
ε) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = ab + 1$.
στ) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = |a|\, b$.

Πρόβλημα 2. Εστω $\star$ μια (διμελής) πράξη στο σύνολο A η οποία έχει ουδέτερο στοιχείο και για την οποία ισχύει ότι $a \star (b \star c) = (a \star c) \star b$, γιά κάθε $a, b, c \in A$. Να αποδειχθεί ότι η πράξη $\star$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

Πρόβλημα 3. Έστω ότι $a^s \equiv 1 \text{mod} m$ και $a^t \equiv 1 \text{mod} m$. Αν $d =$ μ.κ.δ.(s, t) να δειχθεί ότι $a^d \equiv 1 \text{mod} m$.

Πρόβλημα 4. **α)** Γράψτε όλα τα μή μηδενικά στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_{13}$ και δίπλα στο καθένα το αντίστροφό του.
β) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_{24}$. Για κάθε ένα από αυτά βρείτε το αντιστροφό του.

Πρόβλημα 5. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2 - 2x + 2 = 0$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$. (δηλ. να βρεθούν όλα τα $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$ με $\bar{a}^2 - \bar{2}\bar{a} + \bar{2} = \bar{0}$).
β) $x^2 + 2x - 2 = 0$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$.

Πρόβλημα 6. Για να βρούμε τις ακέραιες λύσεις τής εξίσωσης $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ δουλεύουμε ως εξής:

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Longleftrightarrow x(x-3)(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 3, -1\,.$$

Η παραπάνω παραγοντοποίηση ισχύει και στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{12}$. Όμως η παραπάνω εξίσωση έχει ως λύσεις στον $\mathbb{Z}_{12}$, εκτός των $\bar{0}$, $\bar{3}, \overline{-1} = \bar{1}\bar{1}$, και την $\bar{8}$. Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση για αυτό;

Πρόβλημα 7. **α)** Εστω a ακέραιος αριθμός. Δείξτε ότι το 4 δεν διαιρεί το $a^2 - 2$ ούτε το $a^2 - 3$. (<u>Υπόδειξη:</u> Χρησιμοποιήστε τον τύπο $a\text{mod}4 \cdot a\text{mod}4 = a^2\text{mod}4$.)
β) Αν γιά τον ακέραιο a ισχύει ότι $4|a - 3$ δείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y γιά τούς οποίους έχουμε $x^2 + y^2 = a$.

Πρόβλημα 8. Υπολογίστε τούς αριθμούς Euler $\phi(35)$, $\phi(48), \phi(1000)$.

Πρόβλημα 9. **α)** Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 3^{47} με το 23.

β) Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 94^{200} διά 13.
γ) Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 7^{1000} διά 24.
δ) Βρείτε τό υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 641^{108002} διά 63.
ε) Βρείτε το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο τού αριθμού 7^{123}.
στ) Αποδείξτε ότι, γιά κάθε ακέραιο n, ο αριθμός $n^{37} - n$ είναι πολλαπλάσιο τού 383838. (Υπόδειξη: $383838 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$.)

Πρόβλημα 10. Έστω p περιττός πρώτος. Αποδείξτε ότι τά μόνα στοιχεία τού $\mathbb{Z}_p$, τα οποία έχουν αντίστροφο τόν ευατό τους, είναι τα $1\text{mod}p$ και $(p-1)\text{mod}p$. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι $1\text{mod}p \cdot 2\text{mod}p \cdots (p-1)\text{mod}p = (p-1)\text{mod}p$ και αποδείξτε το *Θεώρημα τού Wilson*: $(p-1)! \equiv -1\text{mod}p$.