ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Πρόβλημα 1. Έστω R δακτύλιος χαρακτηριστικης n και έστω m ένας ακέραιος αριθμός. Αν $a \in R$ δείξτε ότι $ma = ra$, όπου r το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού m δια τού n.

Πρόβλημα 2. **α)** Έστω S_1 και S_2 υποδακτύλιοι δακτυλίου R. Δείξτε ότι η τομή τους $S_1 \cap S_2$ είναι υποδακτύλιος τού R.
β) Αν $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι το $n\mathbb{Z}$ (δηλ. το συνολο των πολλάπλασίων τού n) είναι υποοδακτύλιος τού $\mathbb{Z}$.
γ) Δείξτε ότι αν $n, m \in \mathbb{N}$ τότε $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = e\mathbb{Z}$, όπου e είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των n και m.

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε το υποσύνολο S τού $\mathbb{Z}_{10}$ που ορίζεται ως $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$.
α) Δείξτε ότι το S είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{Z}_{10}$.
β) Δείξτε ότι ο δακτύλιος S έχει μοναδιαίο στοιχείο (το οποίο βέβαια είναι διαφορετικό από το μοναδιαίο στοιχείο τού $\mathbb{Z}_{10}$ διότι $\bar{1} \notin S$).

Πρόβλημα 4. **α)** Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2}, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος τού δακτυλίου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
β) Δείξτε ότι αν $s \in \mathbb{N}$ το στοιχείο $(3 - 2\sqrt{2})^s$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Πρόβλημα 5. Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις ορίζουν ομομορφισμούς δακτυλίων $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
α) $\phi(z) = -z$.
β) $\phi(z) = \bar{z}$.
γ) $\phi(z) = |z|$.
δ) $\phi(z) = z^2$.

Πρόβλημα 6. Έστω M το σώμα τής άσκησης 10, φυλλαδιο 4. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : M \to \mathbb{C}$ με $\phi(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}) = a + ib$ ορίζει ισομορφισμό σωμάτων (δηλ. ομομορφισμό δακτυλίων που είναι 1-1 και επί).

Πρόβλημα 7. **α)** Δείξτε ότι αν $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων τότε ή ϕ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός (δηλ. $\phi(m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$) ή ϕ είναι ο ταυτοτικός (δηλ. $\phi(m) = m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$). *Υπόδειξη:* εξετάστε την τιμή τού $\phi(1)$ και δείξτε ότι θα πρέπει $\phi(1) = 0$ ή 1).
β) Υπάρχει, μη μηδενικός, ομομορφισμός δακτυλίων από το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων; *Υπόδειξη:* δείξτε όπως παραπάνω ότι θα πρέπει $\phi(1) = 0$.

Πρόβλημα 8. Εστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος.
α) Δείξτε, με επαγωγή, ότι αν $a, b \in R$, τότε για κάθε φυσικό n έχουμε $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$, όπου $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.
β) Από την συνδυαστική είναι γνωστό ότι το $\binom{n}{i}$ απαριθμεί το πλήθος των υποσυνόλων

με i το πλήθος στοιχεία ενός συνόλου που έχει n το πλήθος στοιχεία. Επομένως είναι ένας φυσικός αριθμός. Δείξτε οτι αν p πρώτος αριθμός και $1 \leq i \leq p-1$ τότε $p \mid \binom{p}{i}$.
Υπόδειξη: Έστω $\binom{p}{i} = n \in \mathbb{N}$.Τότε, $p! = i!(p-i)!n$. Το p διαιρεί το αριστερό μέλος άρα θα πρέπει να διαιρεί και το δεξί. Δείξτε ότι δεν διαιρεί το $i!$ και το $(p-i)!$ άρα θα πρέπει να διαιρεί το n.

γ) Δείξτε ότι αν ο δακτύλιος R έχει χαρακτηριστική p=πρώτος αριθμός, τότε $(a+b)^p = a^p + b^p$, για κάθε $a, b \in R$.

δ) Δείξτε ότι η ιδιότητα τού ερωτήματος γ) σας είναι ήδη γνωστό ότι ισχύει στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_p$, p=πρώτος αριθμός.