ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

Πρόβλημα 1. Αν p είναι πρώτος αριθμός γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Z}_p$ είναι σώμα. Βρείτε το αντίστροφο τού στοιχείου $\bar{2}$ (Υπόδειξη: κάνετε πρώτα μερικά παραδείγματα για συγκεκριμμένες τιμές τού p).

Πρόβλημα 2. Έστω p πρώτος αριθμός και έστω $\bar{a} \neq \bar{0}$ ένα στοιχείο τού $\mathbb{Z}_p$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει στοιχείο τού $\mathbb{Z}_p$ που να ικανοποιεί την εξίσωση $x^p - x + \bar{a} = \bar{0}$ (δηλ. η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_p$).

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε την $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_5$ με $\phi(a \bmod 20) = a \bmod 5$.
α) Δείξτε ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (δηλ. ο ορισμός της δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπου στην κλάση $\bar{a}$.
β) Δείξτε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και βρείτε τον πυρήνα του και την εικόνα του.

Πρόβλημα 4. Έστω $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_8$ με $\phi(a \bmod 20) = a \bmod 8$. Είναι η ϕ καλά ορισμένη απεικόνιση ;

Πρόβλημα 5. **α)** Ποιό είναι το αντίστροφο $\bar{7}^{-1}$ τού στοιχείου $\bar{7}$ στο σώμα $\mathbb{Z}_{17}$;
β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα α), υπολογίστε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 7^{31} δια τού 17.

Πρόβλημα 6. **α)** Δείξτε ότι αν $n \mid a$ τότε μ.κ.δ.$(a+b, n) =$ μ.κ.δ.(b, n).
β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα α) και την ταυτότητα $\frac{a^n-1}{a-1} = a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1 = (a^{n-1}-1) + \cdots + (a^2-1) + (a-1) + n$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(\frac{5^{30}-1}{4}, 4) =$ μ.κ.δ.$(4, 30) = 2$.

Πρόβλημα 7. Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιάιο στοιχείο και έστω I ένα ιδεώδες του.
α) Δείξτε ότι αν $1_R \in I$ τότε $I = R$.
β) Έστω u ένα αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου R. Δείξτε ότι αν $u \in I$ τότε $I = R$.
γ) Χρησμοποιώντας το ερώτημα β) δείξτε ότι τα μόνα ιδεώδη ενός σώματος K είναι το μηδενικό ιδεώδες $I = \{0_K\}$ και τό σώμα K (δηλ. $I = K$).

Πρόβλημα 8. **α)** Έστω R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο 1_R. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ με $\phi(n) = n\,1_R$ (θυμηθείτε τον ορισμό $n\,a$, όπου $n \in \mathbb{Z}$, $a \in R$). Δείξτε ότι ο ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.
β) Αν ο ϕ τού ερωτήματος α) είναι μονομορφισμός δείξτε ότι $n\,1_R \neq 0_R$, για κάθε $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Αν ο ϕ δεν είναι μονομορφισμός τότε, από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι $\mathrm{Ker}\phi = n\mathbb{Z}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το παραπάνω n είναι η χαρακτηριστική τού δακτυλίου 0_R.