ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 7

Πρόβλημα 1. Έστω R δακτύλιος και $R[x]_0$ το υποσύνολο τού $R[x]$ που περιέχει τα πολυώνυμα με σταθερό όρο μηδέν (δηλ. $a_0 = 0$). Δείξτε ότι το $R[x]_0$ είναι υποδακτύλιος τού $R[x]$.

Πρόβλημα 2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα στο $\mathbb{Z}_5[x]$:
α) $(-\bar{4} + \bar{1}x + \bar{3}x^2)(\bar{3} - x + \bar{3}x^2)$.
β) $(\bar{1} - \bar{2}x^2 + \bar{3}x^6)(\bar{2} + \bar{2}x + \bar{7}x^2)$, όπου με $\bar{a}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία τού $\mathbb{Z}_5$.

Πρόβλημα 3. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $f(x)$ τού $\mathbb{Z}[x]$ που ικανοποιούν την συνθήκη $f(x) = f(-x)$. Ομοίως, να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα τού $\mathbb{Z}_2[x]$ που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη.

Πρόβλημα 4. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία (μονάδες) στους επόμενους δακτυλίους:
α) $\mathbb{Z}[x]$.
β) $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 5. α) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\bar{3} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο (μονάδα) τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[x]$, όπου με $\bar{a}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία τού $\mathbb{Z}_4$.
β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\bar{4}x + \bar{3} \in \mathbb{Z}_8[x]$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο (μονάδα) τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.
γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_8[x]$ δεν είναι αντιστρέψιμο στοιχείο (μονάδα) τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.

Πρόβλημα 6. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος και έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$, όπου $a_n \neq 0$, είναι διαιρέτης τού μηδενός. Δείξτε τότε ότι το $a_n \in R$ είναι διαιρέτης τού μηδενός.

Πρόβλημα 7. α) Αποδείξτε τις εξής γενικεύσεις τού προβλήματος 8γ), φυλλάδιο 5. Αν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και $n \in \mathbb{N}$ τότε:
i) $(\bar{a} + \bar{b})^{p^n} = \bar{a}^{p^n} + \bar{b}^{p^n}$, για καθε $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$.
ii) $(\bar{a}_1 + \cdots + \bar{a}_k)^{p^n} = \bar{a}_1^{p^n} + \cdots + \bar{a}_k^{p^n}$, για καθε $\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_k \in \mathbb{Z}_p$.
β) Με χρήση τού ερωτήματος α) δείξτε ότι αν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ τότε $f(x)^p = f(x^p)$.
γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^p - \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$, p=πρώτος αριθμός, έχει μοναδική ρίζα.

Πρόβλημα 8. **α)** Εστω $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Δείξτε ότι αν $\xi = p/q \in \mathbb{Q}$ με $(p, q) = 1$ είναι ρίζα τού πολυωνύμου $f(x)$ στο $\mathbb{Q}$, τότε $q | a_n$.
β) Εστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ έχει ρίζα στο $\mathbb{Q}$. Δείξτε τότε ότι έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}$.

Πρόβλημα 9. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$. Βρείτε όλες τις ρίζες τού $f(x)$: i) στο $\mathbb{Z}$, ii) στο $\mathbb{Q}$, iii) στο $\mathbb{R}$ και iv) στο $\mathbb{C}$.

Πρόβλημα 10. Βρείτε όλες τις ρίζες των παρακάτω πολυωνύμων:
α) $x^3 - \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$.
β) $x^5 + \bar{3}x^3 + x^2 + \bar{2}x \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 11. Βρείτε όλες τις ρίζες τού πολυωνύμου $f(x) = \bar{3}x^{223} + \bar{2}x^{70} + \bar{3}x^{61} + \bar{2}x^{40} \in \mathbb{Z}_5[x]$.