ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #8

Πρόβλημα 1. **α)** Ειναι το $x^2 + \bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
β) Ειναι το $x^2 + \bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;
γ) Είναι το $x^3 + x + \bar{2}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
δ) Είναι το $x^3 - \bar{3}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_7[x]$;
ε) Είναι το $x^3 + x + \bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι το $x - \bar{1}$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$, αν και μόνον αν, το $f(x)$ έχει έναν άρτιο αριθμό μη μηδενικών συντελεστών.

Πρόβλημα 3. Διαιρέστε το $2x^5 - x^3 + 3x - 5$ με το $x^2 + 7$, θεωρώντας τα ως πολυώνυμα:
α) τού $\mathbb{Z}_3[x]$,
β) τού $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 4. Βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 4 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ γράφεται ως γινόμενο τεσσάρων πολυωνύμων βαθμού ένα.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 - 22x^2 + 1$ είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 7. Βρείτε αν τα παρακάτω πολυώνυμα ικανοποιούν το κριτήριο τού Eisenstein.
α) $8x^3 + 6x^2 - 9x + 24$.
β) $2x^{10} - 25x^3 + 10x^2 - 30$.

Πρόβλημα 8. Έστω p πρώτος και $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ βαθμού $> p$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο $g(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$, βαθμού $< p$, τέτοιο ώστε $g(a) = f(a)$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}_p$. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το πολυώνυμο $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$).

Πρόβλημα 9. Έστω p πρώτος και $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ ο ομομορφισμός δακτυλίων, που ορίζεται από τη σχέση $\phi(a) = \bar{a}$. Τότε:
α) Η απεικόνιση $\overline{\phi} : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$, που ορίζεται από τη σχέση

$$\overline{\phi}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \phi(a_0) + \phi(a_1)x + \cdots + \phi(a_n)x^n$$

είναι ομομορφισμός δακτυλίων.
β) Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, τέτοιο ώστε, ο βαθμός τού $\overline{\phi}(f(x))$ είναι ο ίδιος με τον βαθμό τού $f(x)$ και το $\overline{\phi}(f(x))$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_p[x]$. Αποδείξτε ότι, τότε, το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.
γ) Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + 17x + 36$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 10. Εστω $\mathbb{Z}[i] = \{n + mi,\ n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.
α) Δείξτε ότι ο $\mathbb{Z}[i]$ είναι δακτύλιος.
β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$ που ορίζεται ως $\phi(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{f}(i)$ είναι επιμορφισμός δακτυλίων (δηλ. ομομορφισμός δακτυλίων που είναι επί ως απεικόνιση).
γ) Δείξτε ότι ο πυρήνας τού επιμορφισμού ϕ είναι τα πολλαπλάσια τού πολυωνύμου $x^2 + 1$, δηλ. είναι το σύνολο $\{g(x)(x^2 + 1),\ \ g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$.