ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Γράψτε τον τύπο τής Ευκλείδειας διαίρεσης τού a διά τού b στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $a = -327$, $b = 12$.
β) $a = 453$, $b = -8$.
γ) $a = -372$, $b = -11$.

Πρόβλημα 2. Βρείτε τον $d =$ μ.κ.δ.$(1147, 851)$. Γράψτε τον d στην μορφή $d = 1147\,\kappa + 851\,\lambda$ γιά κάποιους ακέραιους κ, λ.

Πρόβλημα 3. Έστω a ένας περιττός ακέραιος.
α) Δείξτε ότι το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού a^2 διά τού 4 ισούται με 1.
β) Δείξτε ότι το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού a^2 διά τού 8 ισούται με 1.

Πρόβλημα 4. Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι υπάρχουν ακέραιοι x, y με $ax + by = c$ αν και μόνον αν μ.κ.δ.$(a, b) \mid c$.

Πρόβλημα 5. Εστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
α) Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(a, c) =$ μ.κ.δ.$(b, c) = 1$ τότε μ.κ.δ.$(ab, c) = 1$.
β) Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(a, c) = 1$ και μ.κ.δ.$(b, c) = d$ τότε μ.κ.δ.$(ab, c) = d$.

Πρόβλημα 6. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(5n + 1, 21n + 4) = 1$.

Πρόβλημα 7. Εστω $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$.
α) Αν $k \neq 0$, δείξτε ότι μ.κ.δ.$(ka, kb) = |k|$ μ.κ.δ.(a, b).
γ) Αν μ.κ.δ.$(b, c) = 1$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(ab, c) =$ μ.κ.δ.(a, c).
δ) Αν μ.κ.δ.$(ab, c) = 1$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(a, c) = 1$ και μ.κ.δ.$(b, c) = 1$.

Πρόβλημα 8. Εστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με μ.κ.δ.$(m, n) = 1$. Δείξτε ότι μ.κ.δ.$(m + n, m - n) = 1$ ή 2.

Πρόβλημα 9. **α)** Εστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq 1$. Δείξτε ότι $2^n - 1 | 2^{nm} - 1$. Συμπεράνατε ότι αν $2^n - 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε και ο n είναι πρώτος.
β) Εστω $k, r \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $2^{2^r} + 1 | 2^{2^r(2k+1)} + 1$. Συμπεράνατε ότι αν ο $2^n + 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε το n είναι μιά δύναμη τού 2.

Πρόβλημα 10. Βρείτε τον $d =$ μ.κ.δ.$(144, 625)$ χρησιμοποιόντας ι) την Ευκλείδεια διαίρεση και ιι) την ανάλυση των 144 και 625 σε πρώτους αριθμούς.

Πρόβλημα 11. Εστω p πρώτος αριθμός και $a \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι αν $p | a^2$ τότε $p | a$. Ισχύει το ίδιο αν ο p δεν είναι πρώτος αριθμός;

Πρόβλημα 12. **α)** Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι:
i) Αν μ.κ.δ.$(a, b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a + b, a - b) = 1$ ή 2.
ii) Άν μ.κ.δ.$(a, b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a - b, a^2 + ab + b^2) = 1$ ή 3.

β) Για κάθε μιά από τις παρακάτω εξισώσεις, βρείτε όλες τίς λύσεις της x, y που είναι φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το ερώτημα α) και το θεώρημα ανάλυσης σε πρώτους αριθμούς).

1. $x^2 - y^2 = 135$
2. $x^2 - y^2 = 72$
3. $x^3 - y^3 = 721$
4. $x^3 - y^3 = 3087$