

## ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

**Πρόβλημα 1.** Βρείτε ποιές από τις παρακάτω σχέσεις  $\sim$  στους πραγματικούς αριθμούς  $\mathbb{R}$  ορίζουν σχέσεις ισοδυναμίας. Για κάθε μία από τις τελευταίες περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

α)  $x \sim y$  αν  $x \geq y$ .

β)  $x \sim y$  αν  $|x| = |y|$ .

γ)  $x \sim y$  αν  $|x - y| \leq 3$ .

**Πρόβλημα 2.** Εστω  $\mathbb{Q}$  το σύνολο των ρητών αριθμών. Ορίζουμε  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ . Στο  $\mathbb{Q}^*$  ορίζουμε την σχέση  $\sim$  ως εξής:

$$a \sim b \iff a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

Ναδειχθεί ότι η  $\mathcal{R}$  είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρεθεί η κλάση ισοδυναμίας τού στοιχείου  $5/2 \in \mathbb{Q}^*$ .

**Πρόβλημα 3.** Στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε την σχέση  $\sim$  ως εξής:  $a \sim b \iff b - a \in \mathbb{R}$ , όπου  $\mathbb{R}$  το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε το σύνολο πηλίκων  $\mathbb{C}/\sim$ .

**Πρόβλημα 4.** Στο σύνολο  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ορίζουμε την σχέση  $\sim$  ως εξής:  $a \sim b$  αν και μόνον αν  $ab > 0$ . Δείξτε ότι η  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει αυτή η σχέση.

**Πρόβλημα 5.** Έστω  $\mathbb{Z}_m$  το σύνολο των ακεραίων modulo  $m$  τα στοιχεία τού οποίου τα έχουμε συμβολίσει ως  $\bar{a}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ . Βρείτε τον ακέραιο  $r$  με  $0 \leq r \leq m - 1$  για τον οποίο έχουμε:

α)  $\overline{126} = \bar{r}$  στο  $\mathbb{Z}_{12}$ .

β)  $\overline{-1} = \bar{r}$  στο  $\mathbb{Z}_{12}$ .

γ)  $\overline{-20} = \bar{r}$  στο  $\mathbb{Z}_8$ .

δ)  $\overline{-200} = \bar{r}$  στο  $\mathbb{Z}_9$ .

**Πρόβλημα 6.** Για ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η  $\star$  ορίζει διμελή πράξη;. Στην περίπτωση που ορίζεται πράξη εξετάστε αν αυτή είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική και αν έχει ουδέτερο στοιχείο.

α) Στο σύνολο των ρητών  $\mathbb{Q}$  με  $a \star b = a + b$

β) Στο σύνολο των ρητών  $\mathbb{Q}$  με  $a \star b = \frac{a}{b}$

γ) Στο σύνολο των φυσικών  $\mathbb{N}$  με  $a \star b = a^b$

δ) Στο σύνολο των ακεραίων  $\mathbb{Z}$  με  $a \star b = a^b$

ε) Στο σύνολο των ρητών  $\mathbb{Q}$  με  $a \star b = ab + 1$ .

στ) Στο σύνολο των ρητών  $\mathbb{Q}$  με  $a \star b = |a|b$ .

**Πρόβλημα 7.** Εστω  $\star$  μια (διμελής) πράξη στο σύνολο  $A$  η οποία έχει ουδέτερο στοιχείο και για την οποία ισχύει ότι  $a \star (b \star c) = (a \star c) \star b$ , για κάθε  $a, b, c \in A$ . Να αποδειχθεί ότι η πράξη  $\star$  είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

**Πρόβλημα 8.** α) Γράψτε όλα τα μή μηδενικά στοιχεία τού δακτυλίου  $\mathbb{Z}_{13}$  και δίπλα στο καθένα το αντίστροφό του.  
β) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού δακτυλίου  $\mathbb{Z}_{24}$ . Για κάθε ένα από αυτά βρείτε το αντίστροφό του.