ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Πρόβλημα 1. Έστω $(G, \star)$ ομάδα και $a, b \in G$. Δείξτε ότι $a \star b = e \Longleftrightarrow b \star a = e$, όπου ως e συμβολίζουμε το ουδέτερο στοιχείο τής G.

Πρόβλημα 2. Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω ζεύγη συνιστούν ομάδα:
α) $(\{-1, 0, 1\}, +)$.
β) $(A, +)$, όπου $A = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$ συνεχής συνάρτηση$\}$. Η πράξη $+$ συμβολίζει το άθροισμα συναρτήσεων, δηλ. αν $f, g \in A$ τότε $f + g$ είναι η συνάρτηση με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
γ) $(A, \cdot)$, όπου A όπως στο β). Η πράξη $\cdot$ συμβολίζει το γινόμενο συναρτήσεων, δηλ. αν $f, g \in A$ τότε $f \cdot g$ είναι η συνάρτηση με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
δ) $(B, \cdot)$, όπου $B = \{2^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ και $\cdot$ ο πολλαπλασιασμός.

Πρόβλημα 3. Έστω n ένας φυσικός αριθμός. Συμβολίζουμε ως U_n το σύνολο των n-στών μιγαδικών ριζών τής μονάδος, δηλ. το σύνολο των μιγαδικών λύσεων τής εξίσωσης $z^n = 1$. Δείξτε ότι το $(U_n, \cdot)$, όπου $\cdot$ ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών, είναι αβελιανή ομάδα.

Πρόβλημα 4. Έστω ακέραιος $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $n\mathbb{Z} = \{nk,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$, εφοδιασμένο με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμο των ακεραίων, είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, χωρίς μοναδιαίο στοιχείο.

Πρόβλημα 5. Βρείτε όλους τούς διαιρέτες τού μηδενός στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{20}$. Γιά κάθε τέτοιο μηδενοδιαιρέτη $\bar{a}$ βρείτε ένα στοιχείο $\bar{b} \neq 0$ με $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$.

Πρόβλημα 6. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2 - 2x + 2 = 0$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$. (δηλ. να βρεθούν όλα τα $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$ με $\bar{a}^2 - \bar{2}\bar{a} + \bar{2} = \bar{0}$).
β) $x^2 + 2x - 2 = 0$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$.

Πρόβλημα 7. Για να βρούμε τις ακέραιες λύσεις τής εξίσωσης $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ δουλεύουμε ως εξής:

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Longleftrightarrow x(x-3)(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 3, -1\,.$$

Η παραπάνω παραγοντοποίηση ισχύει και στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{12}$. Όμως η παραπάνω εξίσωση έχει ως λύσεις στον $\mathbb{Z}_{12}$, εκτός των $\bar{0}$, $\bar{3}, \overline{-1} = \bar{1}\bar{1}$, και την $\bar{8}$. Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση για αυτό;

Πρόβλημα 8. Εστω p πρώτος αριθμός. Ορίζουμε ως

$$A_p = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ \text{όπου } m, n \in \mathbb{Z} \text{ και μ.κ.δ.}\,(p, n) = 1\} \subseteq \mathbb{Q}\,.$$

α) Δείξτε ότι το A_p είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.
β) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του.

Πρόβλημα 9. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}[i] = \{m + in,\ m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;

Πρόβλημα 10. Δείξτε ότι το σύνολο των πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, με $a, b, c \in \mathbb{Z}$, εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι δακτύλιος. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;

Πρόβλημα 11. Δείξτε ότι το σύνολο $S = \{\frac{a}{2^n},\ a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;