# ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

**Πρόβλημα 1.** Εστω $M$ το σύνολο των $2 \times 2$ πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $M$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι σώμα.

**Πρόβλημα 2.** **α)** Έστω $I_1$ και $I_2$ ιδεώδη ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου $R$. Δείξτε ότι η τομή τους $I_1 \cap I_2$ είναι ιδεώδες τού $R$.
**β)** Έστω $a \in \mathbb{Z}$. Συμβολίζουμε ως $< a >$ το κύριο ιδεώδες που παράγεται (έχει γεννήτορα) από το $a$. Δείξτε ότι αν $n, m \in \mathbb{Z}$ τότε $< n > \cap < m > = < e >$, όπου $e$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $n$ και $m$.

**Πρόβλημα 3.** Θεωρούμε το υποσύνολο $S$ τού $\mathbb{Z}_{10}$ που ορίζεται ως $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$.
**α)** Δείξτε ότι το $S$ είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{Z}_{10}$.
**β)** Δείξτε ότι ο δακτύλιος $S$ έχει μοναδιαίο στοιχείο (το οποίο βέβαια είναι διαφορετικό από το μοναδιαίο στοιχείο τού $\mathbb{Z}_{10}$ διότι $\bar{1} \notin S$).

**Πρόβλημα 4.** **α)** Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2}, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος τού δακτυλίου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
**β)** Δείξτε ότι το στοιχείο $3 - 2\sqrt{2}$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

**Πρόβλημα 5.** Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις ορίζουν ομομορφισμούς δακτυλίων $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
**α)** $\phi(z) = -z$.
**β)** $\phi(z) = \bar{z}$.
**γ)** $\phi(z) = |z|$.
**δ)** $\phi(z) = z^2$.

**Πρόβλημα 6.** Έστω $M$ το σώμα τού προβλήματος 1. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : M \to \mathbb{C}$ με $\phi(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}) = a + ib$ ορίζει ισομορφισμό σωμάτων (δηλ. ομομορφισμό δακτυλίων που είναι 1-1 και επί).

**Πρόβλημα 7.** Αν $p$ είναι πρώτος αριθμός γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Z}_p$ είναι σώμα. Βρείτε το αντίστροφο τού στοιχείου $\bar{2}$ (Υπόδειξη: κάνετε πρώτα μερικά παραδείγματα για συγκεκριμμένες τιμές τού $p$).

**Πρόβλημα 8.** Συμβολίζουμε τα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_n$ ως $\bar{a}_n$. Θεωρούμε την $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_5$ με $\phi(\bar{a}_{20}) = \bar{a}_5$.
**α)** Δείξτε ότι η $\phi$ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (δηλ. ο ορισμός της δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπου στην κλάση $\bar{a}_{20}$ στο $\mathbb{Z}_{20}$).
**β)** Δείξτε ότι η $\phi$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και βρείτε τον πυρήνα του και την εικόνα του.

**Πρόβλημα 9.** Συμβολίζουμε τα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_n$ ως $\bar{a}_n$. Έστω

$\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_8$ με $\phi(\bar{a}_{20}) = \bar{a}_8$. Είναι η $\phi$ καλά ορισμένη απεικόνιση ;

**Πρόβλημα 10.** Ποιό είναι το αντίστροφο $\bar{7}^{-1}$ τού στοιχείου $\bar{7}$ στο σώμα $\mathbb{Z}_{17}$;

**Πρόβλημα 11.** Έστω $R$ ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο το $1_R$ και έστω $I$ ένα ιδεώδες του.
**α)** Δείξτε ότι αν $1_R \in I$ τότε $I = R$.
**β)** Έστω $u$ ένα αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $R$. Δείξτε ότι αν $u \in I$ τότε $I = R$.
**γ)** Χρησμοποιώντας το ερώτημα β) δείξτε ότι τα μόνα ιδεώδη ενός σώματος $K$ είναι το μηδενικό ιδεώδες $I = \{0_K\}$ και τό σώμα $K$ (δηλ. $I = K$).

**Πρόβλημα 12.** Δείξτε ότι αν $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων τότε ή $\phi$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός (δηλ. $\phi(m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$) ή $\phi$ είναι ο ταυτοτικός (δηλ. $\phi(m) = m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$). (*Υπόδειξη:* εξετάστε την τιμή τού $\phi(1)$ και δείξτε ότι θα πρέπει $\phi(1) = 0$ ή $1$).

**Πρόβλημα 13.** Εστω $R$ αντιμεταθετικός δακτύλιος.
**α)** Δείξτε, με επαγωγή, ότι αν $a, b \in R$, τότε για κάθε φυσικό $n$ έχουμε $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$, όπου $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.
**β)** Από την συνδυαστική είναι γνωστό ότι το $\binom{n}{i}$ απαριθμεί το πλήθος των υποσυνόλων με $i$ το πλήθος στοιχεία ενός συνόλου που έχει $n$ το πλήθος στοιχεία. Επομένως είναι ένας φυσικός αριθμός. Δείξτε οτι αν $p$ πρώτος αριθμός και $1 \leq i \leq p-1$ τότε $p \mid \binom{p}{i}$. Υπόδειξη: Έστω $\binom{p}{i} = n \in \mathbb{N}$.Τότε, $p! = i!(p-i)!n$. Το $p$ διαιρεί το αριστερό μέλος άρα θα πρέπει να διαιρεί και το δεξί. Δείξτε ότι δεν διαιρεί το $i!$ και το $(p-i)!$ άρα θα πρέπει να διαιρεί το $n$.
**γ)** Δείξτε ότι αν $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$, όπου $p$ πρώτος αριθμός, τότε $(\bar{a} + \bar{b})^p = \bar{a}^p + \bar{b}^p$ (Υπόδειξη: δείξτε πρώτα ότι $p\,\bar{a} = \overline{pa} = \bar{0}$).

**Πρόβλημα 14.** Έστω $R$ δακτύλιος και $R[x]_0$ το υποσύνολο τού $R[x]$ που περιέχει τα πολυώνυμα με σταθερό όρο μηδέν (δηλ. $a_0 = 0$). Δείξτε ότι το $R[x]_0$ είναι ιδεώδες τού $R[x]$.

**Πρόβλημα 15.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα στο $\mathbb{Z}_5[x]$:
**α)** $(-\bar{4} + \bar{1}x + \bar{3}x^2)(\bar{3} - x + \bar{3}x^2)$.
**β)** $(\bar{1} - \bar{2}x^2 + \bar{3}x^6)(\bar{2} + \bar{2}x + \bar{7}x^2)$, όπου με $\bar{a}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία τού $\mathbb{Z}_5$.

**Πρόβλημα 16.** Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία στους επόμενους δακτυλίους:
α) $\mathbb{Z}[x]$.
β) $\mathbb{Z}_5[x]$.

**Πρόβλημα 17.** Έστω $R$ αντιμεταθετικός δακτύλιος και έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$, όπου $a_n \neq 0$, είναι διαιρέτης τού μηδενός (μηδενοδιαιρέτης). Δείξτε τότε ότι το $a_n \in R$ είναι διαιρέτης τού μηδενός.