ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Πρόβλημα 1. Βρείτε όλες τις ρίζες των παρακάτω πολυωνύμων:
α) $x^3 - \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$.
β) $x^5 + \bar{3}x^3 + x^2 + \bar{2}x \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 2. α) Ειναι το $x^2 + \bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
β) Ειναι το $x^2 + \bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;
γ) Είναι το $x^3 + x + \bar{2}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
δ) Είναι το $x^3 - \bar{3}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_7[x]$;
ε) Είναι το $x^3 + x + \bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι το $x - \bar{1}$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$, αν και μόνον αν, το $f(x)$ έχει έναν άρτιο αριθμό μη μηδενικών συντελεστών.

Πρόβλημα 4. Διαιρέστε το $2x^5 - x^3 + 3x - 5$ με το $x^2 + 7$, θεωρώντας τα ως πολυώνυμα:
α) τού $\mathbb{Z}_3[x]$,
β) τού $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ γράφεται ως γινόμενο τεσσάρων πολυωνύμων βαθμού ένα.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 - 22x^2 + 1$ είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ με $f(3) = 0$ είναι ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Q}[x]$. Ισχύει το ίδιο για το σύνολο των πολυωνύμων $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ με $f(3) = 1$;