ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

Πρόβλημα 1. Να βρεθεί ο μ.κ.δ.$(f(x), g(x))$ των παρακάτω πολυωνύμων τού $\mathbb{Q}[x]$ και να εκφραστεί στην μορφή μ.κ.δ.$(f(x), g(x)) = \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$.
α) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2, \;\; g(x) = x^2 - 5x + 6$.
β) $f(x) = x^5 + 3x^2 + 1, \;\; g(x) = x^2 - 1$.

Πρόβλημα 2. Να βρεθεί ο μ.κ.δ.$(f(x), g(x))$ των πολυωνύμων $f(x) = x^{12} + 1, \quad g(x) = x^9 + 1$ τού $\mathbb{Z}_3[x]$ και να εκφραστεί στην μορφή μ.κ.δ.$(f(x), g(x)) = \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$.

Πρόβλημα 3. Γράψτε το πολυώνυμο $\bar{2}x^3 + x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 4. α) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - \bar{2}x^4 + x^3 - x^2 + \bar{2}x + \bar{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$.
β) Γράψτε το πολυώνυμο $f(x)$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 5. Γράψτε το πολυώνυμο $x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 2$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 6. Γράψτε το πολυώνυμο $x^4 - 1 \in F[x]$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $F[x]$ για τις περιπτώσεις α) $F = \mathbb{Q}$, β)$F = \mathbb{R}$, γ) $F = \mathbb{C}$, δ)$F = \mathbb{Z}_3$.

Πρόβλημα 7. α) Γράψτε το πολυώνυμο $x^4 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{R}[x]$ (Υπόδειξη: ποιές είναι οι μιγαδικές ρίζες τού πολυωνύμου;).
β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 8. Γράψτε το πολυώνυμο $x^8 - 1 \in \mathbb{R}[x]$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{R}[x]$.

Πρόβλημα 9. Εστω $\mathbb{Z}[i] = \{n + mi, \; n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.
α) Δείξτε ότι ο $\mathbb{Z}[i]$ είναι δακτύλιος.
β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$ που ορίζεται ως $\phi(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{f}(i)$ είναι επιμορφισμός δακτυλίων (δηλ. ομομορφισμός δακτυλίων που είναι επί ως απεικόνιση).
γ) Δείξτε ότι ο πυρήνας τού επιμορφισμού ϕ είναι τα πολλαπλάσια τού πολυωνύμου $x^2 + 1$, δηλ. είναι το σύνολο $\{g(x)(x^2 + 1), \;\; g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$.