# ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 7

**Πρόβλημα 1.** Εστω $(G, \star)$ ομάδα και $K, L$ υποομάδες τής $G$. Δείξτε ότι $K \cap L$ είναι υποομάδα τής $G$.

**Πρόβλημα 2.** Εστω $(G, \star)$ μια αβελιανή ομάδα και έστω $m$ ένας ακέραιος αριθμός. Δείξτε ότι το $G_m := \{g \in G, \text{ με } g^m = e\}$, όπου $e$ το ουδέτερο στοιχείο, είναι υποομάδα τής $G$.

**Πρόβλημα 3.** **α)** Εστω $(G, \star)$ αβελιανή ομάδα και $A, B$ υποομάδες τής $G$. Δείξτε ότι το $A \star B = \{a \star b,\ a \in A,\ b \in B\}$ είναι υποομάδα τής $G$.
**β)** Εστω $n, m \in \mathbb{Z}$. Από το ερώτημα α) το $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{a + b,\ a \in n\mathbb{Z},\ b \in m\mathbb{Z}\}$ είναι υποομάδα τής ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$. Επομένως, με βάση την θεωρία είναι κυκλική υποομάδα και επομένως ισούται προς $d\mathbb{Z}$, γιά κάποιο $d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Βρείτε το $d$ συναρτήσει των $n, m$.

**Πρόβλημα 4.** Έστω

$$(U_n, \cdot) = \{\zeta \in \mathbb{C}, \zeta^n = 1\} = \{e^{2\pi i/n}, i = 0, \ldots n-1\}$$

οι $n$-οστές μιγαδικές ρίζες τής μονάδος. Δείξτε ότι το $U_n$ είναι ομάδα. Βρείτε, ποιά υποομάδα τής $U_n$ παράγει το στοιχείο $\zeta$, στίς ακόλουθες περιπτώσεις:
**α)** $n = 6$, $\zeta = e^{\frac{4\pi i}{6}}$,
**β)** $n = 6$, $\zeta = e^{\frac{10\pi i}{6}}$,
**γ)** $n = 12$, $\zeta = e^{\frac{4\pi i}{12}}$,
**δ)** $n = 12$, $\zeta = e^{\frac{6\pi i}{12}}$,
**ε)** $n = 12$, $\zeta = e^{\frac{10\pi i}{12}}$.

**Πρόβλημα 5.** Γιά τις κυκλικές ομάδες $\mathbb{Z}_3$ και $\mathbb{Z}_6$:
**α)** Βρείτε όλους τούς γεννήτορές τους.
**β)** Βρείτε όλες τις (διαφορετικές) υποομάδες τους.
**γ)** Βρείτε την τάξη όλων των στοιχείων τους.

**Πρόβλημα 6.** **α)** Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $\mathbb{Z}_{30}$ που έχει ως γεννήτορα το $\overline{25}$;
**β)** Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $\mathbb{Z}_{42}$ που έχει ως γεννήτορα το $\overline{30}$;

**Πρόβλημα 7.** Δείξτε ότι αν το $p$ είναι πρώτος αριθμός τότε οι μόνες κυκλικές υποομάδες τής ομάδας $\mathbb{Z}_p$ είναι η $\{\bar{0}\}$ και η $\mathbb{Z}_p$.

**Πρόβλημα 8.** Βρείτε την κυκλική υποομάδα τής πολλαπλασιαστικής ομάδας των $4 \times 4$ αντιστρεφίμων πινάκων, την οποία παράγει (χωριστά) καθένας από τούς παρακάτω πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Πρόβλημα 9.** Εστω $\mathbb{C}^\star$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Βρείτε την τάξη των κυκλικών υποομάδων τής $\mathbb{C}^\star$ που παράγονται από τα στοιχεία: $i$, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $1+i$. Σε κάθε μιά από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε όλους τούς γεννήτορες των κυκλικών υποομάδων.

**Πρόβλημα 10.** Έστω ομάδα $G$, τής οποίας η τάξη είναι $pq$, όπου $p, q$ πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα $H$ τής $G$, με $H \neq G$, είναι κυκλική.

**Πρόβλημα 11.** Υπολογίστε τούς αριθμούς Euler $\phi(35)$, $\phi(48), \phi(1000)$.

**Πρόβλημα 12.** **α)** Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού $3^{47}$ με το 23.
**β)** Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού $94^{200}$ διά 13.
**γ)** Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού $7^{1000}$ διά 24.
**δ)** Βρείτε τό υπόλοιπο τής διαίρεσης τού $641^{108002}$ διά 63.
**ε)** Βρείτε το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο τού αριθμού $7^{123}$.
**στ)** Αποδείξτε ότι, γιά κάθε ακέραιο $n$, ο αριθμός $n^{37} - n$ είναι πολλαπλάσιο τού 383838. (Υπόδειξη: $383838 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$.)