

ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 8

Πρόβλημα 1. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε αν η απεικόνιση, που δίνεται, είναι ομομορφισμός. Στην περίπτωση που είναι ομομορφισμός βρείτε την πυρήνα του και την εικόνα του.

1. Ομάδες $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(n) = -2n$.
2. Ομάδες $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ και $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = [x]$.
3. Ομάδα (\mathbb{R}^*, \cdot) και $\phi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = |x|$.
4. Ομάδα (G, \star) και $\phi : G \rightarrow G$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(g) = g^{-1}$.
5. Ομάδες $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}^*, \cdot) και $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = e^x$.
6. Ομάδες $(\mathbb{Z}_6, +)$, $(\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(\bar{a}_6) = \bar{a}_2$.
7. Ομάδες $(\mathbb{Z}_9, +)$, $(\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(\bar{a}_9) = \bar{a}_2$.
8. Ομάδες $(F, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, όπου F το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} , και $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(f) = \int_0^4 f(x) dx$.

Πρόβλημα 2. Έστω $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ ομομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι:

α) $\forall a \in G_1$ έχουμε $\text{ord}(\phi(a)) \mid \text{ord}(a)$.

β) Αν, επιπλέον ο ϕ είναι ισομορφισμός, τότε δείξτε ότι $\text{ord}(\phi(a)) = \text{ord}(a)$.

Πρόβλημα 3. Έστω (G, \cdot) ομάδα και $g \in G$ στοιχείο τάξεως n .

α) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο, και a ακέραιος, ισοδυναμεί με το ότι ο a είναι πολλαπλάσιο του n .

β) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = g^b$, όπου a, b ακέραιοι, ισοδυναμεί με το ότι ο $a - b$ είναι πολλαπλάσιο του n .

Πρόβλημα 4. Στην ομάδα S_8 θεωρούμε την μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

α) Βρείτε την αντίστροφη μετάθεση σ^{-1} .

β) Βρείτε την τάξη $\text{ord}(\sigma)$ της σ .

γ) Υπολογίστε την μετάθεση σ^{154} .

Πρόβλημα 5. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{\sigma \in S_5 \mid \sigma(3) = 4\}$.

Πρόβλημα 6. Στην ομάδα S_4 , θεωρούμε το υποσύνολο $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

α) Δείξτε ότι η H είναι υποομάδα της S_4 και μάλιστα αβελιανή.

β) Γράψτε τα αριστερά σύμπλοκα της H στην S_4 .

Πρόβλημα 7. Στην ομάδα S_4 βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle (1324) \rangle$

και τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα της H στην S_4 .

Πρόβλημα 8. Στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle \bar{6} \rangle$ και τα αριστερά (που συμπίπτουν με τα δεξιά) σύμπλοκα της H στην \mathbb{Z}_{18} .

Πρόβλημα 9. Στην ομάδα S_8 βρείτε τις τροχιές της μετάθεσης $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Γράψτε την σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και, επίσης, ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Πρόβλημα 10. Στην ομάδα S_6 εκφράστε κάθε μία από τις παρακάτω μεταθέσεις ως γινόμενο ξένων κύκλων:

α) $(13)(23)$.

β) $(16)(26)(36)(46)(56)$.

γ) $(12345)(16)$.

Πρόβλημα 11. Θεωρούμε την ομάδα S_n .

α) Εστω $s \leq n$. Βρείτε το αντίστροφο του στοιχείου $(12 \dots s)$.

β) Εστω $\tau = (1234)$. Βρείτε την τάξη του στοιχείου τ . Εκφράστε τα τ^2, τ^3 ως γινόμενα ξένων κύκλων.

γ) Ποιά είναι η τάξη του στοιχείου $\gamma = (12345)(567)$

Πρόβλημα 12. Εξετάστε αν η παρακάτω μετάθεση σ είναι άρτια ή περιττή:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 13. Έστω H υποομάδα της ομάδας μεταθέσεων S_n , $n \geq 2$. Δείξτε ότι ή όλες οι μεταθέσεις της H είναι άρτιες ή ακριβώς οι μισές από τις μεταθέσεις της H είναι άρτιες και οι άλλες μισές περιττές.

Πρόβλημα 14. Βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = \bar{3}x^{223} + \bar{2}x^{70} + \bar{3}x^{61} + \bar{2}x^{40} \in \mathbb{Z}_5[x]$.