

ΑΛΓΕΒΡΑ, ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2013-14
ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Δευτέρα 17 Φεβρουαρίου: Διαιρετότητα ακεραίων. Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος. Μέγιστος κοινός διαιρέτης: ορισμοί και ύπαρξη.

Τετάρτη 19 Φεβρουαρίου: Ο μ.κ.δ. των a, b ως το ελάχιστο στοιχείο των θετικών συνδυασμών των a, b . Ιδιότητες του μ.κ.δ. Η εύρεση του μ.κ.δ. με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο. Σχετικά πρώτοι ακέραιοι και οι ιδιότητές τους.

Παρασκευή 21 Φεβρουαρίου [μάθημα αναπλήρωσης]: Πρώτοι αριθμοί. Κάθε φυσικός αριθμός ≥ 2 έχει πρώτο διαιρέτη. Υπάρχουν άπειροι το πλήθος πρώτοι. Ιδιότητες των πρώτων αριθμών. Το θεώρημα ανάλυσης σε πρώτους. Εύρεση του μ.κ.δ. από το θεώρημα ανάλυσης.

Δευτέρα 24 Φεβρουαρίου: Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και η εύρεση αυτού από το θεώρημα ανάλυσης. Σχέση μκδ και εκπ. Σχέσεις, ιδιότητες σχέσεων (ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική), σχέσεις ισοδυναμίας, παραδείγματα.

Τετάρτη 26 Φεβρουαρίου: Μια διαμέριση ενός συνόλου ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο. Κλάσεις ισοδυναμίας, η διαμέριση που επάγει στο σύνολο μια σχέση ισοδυναμίας. Το σύνολο πηλίκων μιας σχέσης ισοδυναμίας. Το σύνολο \mathbb{Z}_n των ακεραίων modulo n .

Παρασκευή 28 Φεβρουαρίου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 3 Μαρτίου: Καθαρά Δευτέρα - δέν έγινε μάθημα.

Τετάρτη 5 Μαρτίου: Πράξεις. Ιδιότητες πράξεων. Ουδέτερο στοιχείο. Αντιστρέψιμα στοιχεία και το αντίστροφό τους. Οι πράξεις στο \mathbb{Z}_m . Ομάδες, ορισμοί και παραδείγματα.

Παρασκευή 7 Μαρτίου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 10 Μαρτίου: Δακτύλιοι. Ορισμοί και παραδείγματα. Απλές ιδιότητες δακτυλίων. Αντιστρέψιμα στοιχεία. Διαιρέτες του μηδενός. Ακέραιες περιοχές.

Τετάρτη 12 Μαρτίου: Ασκήσεις.

Παρασκευή 14 Μαρτίου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 17 Μαρτίου: Ο δακτύλιος \mathbb{Z}_n . Οι μηδενοδιαιρέτες (διαιρέτες του μηδενός) και τα αντιστρέψιμα στοιχεία του \mathbb{Z}_n . Η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων \mathbb{Z}_n^\times . Η συνάρτηση του Euler $\phi(n)$. Υπολογισμός του $\phi(n)$ όταν το $n = p$ πρώτος ή $n = p^s$ δύναμη πρώτου.

Τετάρτη 19 Μαρτίου: Η απόδειξη τού γενικού τύπου υπολογισμού τού $\phi(n)$. Το μικρό θεώρημα τού Fermat και το θεώρημα τού Euler.

Παρασκευή 21 Μαρτίου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 24 Μαρτίου: Υποδακτύλιοι. Κριτήριο υποδακτυλίου. Ιδιότητες υποδακτυλίου. Παραδείγματα. Σώματα. Υποσώματα.

Τετάρτη 26 Μαρτίου: Πολυώνυμα με συντελεστές σε δακτύλιο. Βαθμός πολυωνύμου. Οι επαγόμενες πράξεις και ο δακτύλιος των πολυωνύμων.

Παρασκευή 28 Μαρτίου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 31 Μαρτίου: Ο βαθμός τού αθροίσματος και τού γινομένου δύο πολυωνύμων. Τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού $R[x]$, όπου το R είναι ακέραια περιοχή. Η πολυωνυμική απεικόνιση. Ρίζες πολυωνύμων.

Τετάρτη 2 Απριλίου: Το $f(x) \in R[x]$, έχει ρίζα $a \in R$ αν και μονον αν $f(x) = (x - a)g(x)$. Αν το R είναι ακέραια περιοχή τότε το πλήθος των διαφορετικών ριζών τού $f(x)$ είναι $\leq \deg f(x)$. Αν το R είναι ακέραια περιοχή τότε η πολυωνυμική απεικόνιση είναι 1-1. Ανάγωγα πολυώνυμα τού $K[x]$, όπου K =σώμα και τού $R[x]$, όπου R =ακέραια περιοχή. Πολυώνυμα τού $K[x]$, όπου K =σώμα, βαθμού 1 είναι ανάγωγα. Πολυώνυμα τού $K[x]$, όπου K =σώμα, βαθμού ≥ 2 που έχουν ρίζα στο K δεν είναι ανάγωγα.

Παρασκευή 4 Απριλίου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 7 Απριλίου: Πολυώνυμα τού $K[x]$, όπου K =σώμα, βαθμού 2 ή 3 είναι ανάγωγα εάν και μόνον εάν δεν έχουν ρίζα στο K . Μελέτη των πολυωνύμων $\Phi_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Δείξαμε ότι αν το $n + 1$ δεν είναι πρώτος αριθμός τότε το $\Phi_n(x)$ δεν είναι ανάγωγο. Διατυπώσαμε την πρόταση ότι αν το $n + 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε το $\Phi_n(x)$ είναι ανάγωγο, αλλά την απόδειξη θα την ολοκληρώσουμε σε επόμενο μάθημα. Η Ευκλείδεια διαίρεση στο $K[x]$, K =σώμα.

Τετάρτη 9 Απριλίου: Παραδείγματα Ευκλείδειας διαίρεσης σε σώμα. Πότε μπορούμε να εφαρμόσουμε Ευκλείδεια διαίρεση όταν τα πολυώνυμα έχουν συντελεστές σε δακτύλιο. Η διατύπωση τού Θεμελιώδους Θεωρήματος τής Άλγεβρας για πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές. Βρήκαμε τις μιγαδικές ρίζες τού $x^n - 1$ και τού $x^n + 1$. Τα ανάγωγα πολυώνυμα τού $\mathbb{C}[x]$ είναι τα πρωτοβάθμια πολυώνυμα. Πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Αποδείξαμε ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων πραγματικών πολυωνύμων και δευτεροβάθμιων πραγματικών πολυωνύμων με αρνητική διακρίνουσα. Τα ανάγωγα πολυώνυμα τού $\mathbb{R}[x]$ είναι τα πρωτοβάθμια και τα δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα.

Παρασκευή 11 Απριλίου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 28 Απριλίου: Μέγιστος κοινός διαιρέτης πολυωνύμων. Ιδιότητες και εύρεση μκδ. Πρώτα μεταξύ τους πολυώνυμα. Ιδιότητες διαιρετότητας με πρώτα μεταξύ τους πολυώνυμα. Το θεώρημα ανάλυσης σε ανάγωγα.

Τετάρτη 9 Απριλίου: Ομομορφισμοί δακτυλίων. Παραδείγματα. Απλές ι-διότητες ομομορφισμών. Η εικόνα ενός ομομορφισμού είναι υποδακτύλιος. Ο πυρήνας ενός ομομορφισμού είναι ιδεώδες. Ιδεώδη, κύρια ιδεώδη. Κάθε ιδεώδες του \mathbb{Z} ή του $K[x]$, K =σώμα, είναι κύριο ιδεώδες. Πεπερασμένα παραγόμενα ιδεώδη.

Παρασκευή 2 Μαΐου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 5 Μαΐου: Παραδείγματα ιδεωδών. Ο δακτύλιος πηλίκων ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου με ένα ιδεώδες του. Παραδείγματα. Το θεώρημα ομομορφισμών.

Τετάρτη 7 Μαΐου: Δεν έγινε μάθημα λόγω των φοιτητικών εκλογών.

Παρασκευή 9 Μαΐου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 12 Μαΐου: Η υλοποίηση ενός δακτυλίου πηλίκων δια μέσου του θεωρήματος ομομορφισμών. Το κριτήριο αναγωγιμότητας του Eisenstein. Το πολυώνυμο $x^{p-1} + x^{p-2} \dots + x + 1$, p =πρώτος, είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$. Ομάδες, ορισμοί, τάξη ομάδας, παραδείγματα, απλές ιδιότητες. Ο πίνακας πράξης μιας πεπερασμένης ομάδας.

Τετάρτη 14 Μαΐου: Υποομάδες. Το κριτήριο τής υποομάδας. Κυκλικές υποομάδες. Οι υποομάδες τής ομάδας των ακεραίων είναι κυκλικές. Τάξη στοιχείου. Το κριτήριο εύρεσης τής τάξης ενός στοιχείου και τής κυκλικής υποομάδας που παράγεται από το στοιχείο. Η τάξη των στοιχείων τής \mathbb{Z}_n .

Παρασκευή 16 Μαΐου: Κυκλικές ομάδες. Η ομάδα των μεταθέσεων S_n . Ορισμοί, συμβολισμοί. Η τάξη τής S_n . Το αντίστροφο στοιχείο μιας μετάθεσης. Το $\text{sup}(\sigma)$ μιας μετάθεσης σ . Ξένες μεταξύ τους μεταθέσεις. Οι ξένες μεταξύ τους μεταθέσεις αντιμετατίθενται. Τροχιές, κύκλοι.

Δευτέρα 19 Μαΐου: Δεν έγινε μάθημα λόγω των εκλογών.

Τετάρτη 21 Μαΐου: Κάθε μετάθεση γράφεται ως γινόμενο ξένων μεταξύ τους κύκλων. Οι αντιμεταθέσεις. Κάθε μετάθεση γράφεται ως γινόμενο αντιμεταθέσεων. Το πρόσημο μιας μετάθεσης. Ομομορφισμοί ομάδων. Ιδιότητες. Παραδείγματα. Ισομορφες ομάδες. Η κατάταξη των κυκλικών ομάδων.

Παρασκευή 23 Μαΐου: Ασκήσεις.

Δευτέρα 26 Μαΐου: Δεν έγινε μάθημα λόγω των εκλογών.

Τετάρτη 28 Μαΐου: Σύμπλοκα. Το θεώρημα τού Lagrange. Η τάξη μιας

υποομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας. Ομάδες με τάξη πρώτο αριθμό είναι κυκλικές.

Παρασκευή 30 Μαΐου: Ασκήσεις.