ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #10

Πρόβλημα 1. Βρείτε αν τα παρακάτω πολυώνυμα τού $\mathbb{Q}[x]$ ικανοποιούν το κριτήριο τού Eisenstein.
α) $8x^3 + 6x^2 - 9x + 24$.
β) $2x^{10} - 25x^3 + 10x^2 - 30$.

Πρόβλημα 2. Έστω p πρώτος. Τότε:
α) Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$, που ορίζεται από τη σχέση

$$\phi(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \cdots + \bar{a}_nx^n$$

είναι ομομορφισμός δακτυλίων.
β) Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, τέτοιο ώστε, ο βαθμός τού $\phi(f(x))$ είναι ο ίδιος με τον βαθμό τού $f(x)$ και το $\phi(f(x))$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_p[x]$. Αποδείξτε ότι, τότε, το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.
γ) Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + 17x + 36$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ με $f(3) = 0$ είναι ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Q}[x]$. Ισχύει το ίδιο για το σύνολο των πολυωνύμων $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ με $f(3) = 1$;

Πρόβλημα 4. Ορίζοντας κατάλληλους ομομορφισμούς δακτυλίων δείξτε ότι
α) $\mathbb{Z}_{10}/ < \bar{2} > \cong \mathbb{Z}_2$.
β) $\mathbb{Z}_{20}/ < \bar{5} > \cong \mathbb{Z}_5$.
γ) $\mathbb{R}[x]/ < x - 3 > \cong \mathbb{R}$.
δ) $\mathbb{Z}[x]/ < x^2 + 1 > \cong \mathbb{Z}[i]$ (βλ. άσκηση 9, φυλλ. 3, και θεωρείστε τον ομομορφισμό $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$ με $\phi(f(x)) = f(i)$).

Πρόβλημα 5. α) Είναι ο δακτύλιος πηλίκων $\mathbb{Z}_{15}/ < \bar{5} >$ ακέραια περιοχή;
β) Είναι ο δακτύλιος πηλίκων $\mathbb{Z}_{20}/ < \bar{2} >$ ακέραια περιοχή;

Πρόβλημα 6. Έστω $(G, \star)$ ομάδα με $2n$ στοιχεία. Με την χρήση τού πίνακα πράξης τής G δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο a τής ομάδας, που δεν είναι το ουδέτερο, με την ιδιότητα $a = a^{-1}$.

Πρόβλημα 7. Έστω $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση$\}$ και $F^\star = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ συνάρτηση$\}$. Στό F ορίζομε πράξη την πράξη $+$ και στο $F^\star$ την πράξη $\cdot$ όπως στο πρόβλημα 2 τού φυλλαδίου 3. Δείξτε ότι $(F, +)$ και $(F^\star, \cdot)$ είναι ομάδες. Εν συνεχεία, θεωρήστε τα εξής σύνολα:

$$\begin{aligned} A &= \{f \in F \,:\, f(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}. \\ B &= \{f \in F \,:\, f(1) = 0\}. \\ C &= \{f \in F \,:\, f(0) = 1\}. \\ D &= \text{το σύνολο των σταθερών μη μηδενικών συναρτήσεων.} \end{aligned}$$

Ποιά από τα παραπάνω είναι υποομάδες τής $(F,+)$ και ποιά τής $(F^\star,\cdot)$.

Πρόβλημα 8. **α)** Εστω $(G,\star)$ ομάδα και K,L υποομάδες τής G. Δείξτε ότι $K\cap L$ είναι υποομάδα τής G.
β) Έστω $(G,\star)$ ομάδα και έστω a στοιχείο τής G. Δείξτε ότι το $H_a := \{g\in G,\ \text{όπου } a\star g = g\star a\}$ είναι υποομάδα τής G.

Πρόβλημα 9. Εστω $(G,\star)$ μια αβελιανή ομάδα και έστω m ένας ακέραιος α-ριθμός. Δείξτε ότι το $G_m := \{g\in G,\ \text{με } g^m = e\}$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο, είναι υποομάδα τής G.

Πρόβλημα 10. **α)** Εστω $(G,\star)$ αβελιανή ομάδα και A,B υποομάδες τής G. Δείξτε ότι το $A\star B = \{a\star b,\ a\in A,\ b\in B\}$ είναι υποομάδα τής G.
β) Εστω $n,m\in\mathbb{Z}$. Από το ερώτημα α) το $n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z} = \{a+b,\ a\in n\mathbb{Z},\ b\in m\mathbb{Z}\}$ είναι υποομάδα τής ομάδας $(\mathbb{Z},+)$. Επομένως, με βάση την θεωρία ισούται προς $d\mathbb{Z}$, γιά κάποιο $d\in\mathbb{N}_{\geq 0}$. Βρείτε το d συναρτήσει των n,m.

Πρόβλημα 11. Έστω $(M_n,\cdot)$ η ομάδα των n-οστών μιγαδικών ριζών τής μονάδος, βλ. πρόβλημα 1. Βρείτε, ποιά υποομάδα τής M_n παράγει το στοιχείο ζ, στίς ακόλουθες περιπτώσεις:
α) $n=6,\ \zeta = e^{\frac{4\pi i}{6}} = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}$,
β) $n=6,\ \zeta = e^{\frac{10\pi i}{6}} = \cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}$,
γ) $n=12,\ \zeta = e^{\frac{4\pi i}{12}} = \cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12}$,
δ) $n=12,\ \zeta = e^{\frac{6\pi i}{12}} = \cos\frac{6\pi}{12} + i\sin\frac{6\pi}{12}$,
ε) $n=12,\ \zeta = e^{\frac{10\pi i}{12}} = \cos\frac{10\pi}{12} + i\sin\frac{10\pi}{12}$.

Πρόβλημα 12. Εξετάσατε ποιές από τις παρακάτω ομάδες είναι κυκλικές.
α) $(\mathbb{R},+)$.
β) $(\{+1,-1\},\cdot)$.
γ) $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

Πρόβλημα 13. Γιά τις κυκλικές ομάδες $\mathbb{Z}_3$ και $\mathbb{Z}_6$:
α) Βρείτε τον πίνακα πράξης τους.
β) Βρείτε όλους τούς γεννήτορές τους.
γ) Βρείτε όλες τις (διαφορετικές) υποομάδες τους.
δ) Βρείτε την τάξη όλων των στοιχείων τους.

Πρόβλημα 14. Βρείτε την κυκλική υποομάδα τής πολλαπλασιαστικής ομάδας των 4×4 αντιστρεψίμων πινάκων, την οποία παράγει (χωριστά) καθένας από τούς παρακάτω πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόβλημα 15. **α)** Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $\mathbb{Z}_{30}$ που έχει ως γεννήτορα το $\overline{25}$;
β) Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $\mathbb{Z}_{42}$ που έχει ως γεννήτορα το $\overline{30}$;

Πρόβλημα 16. Εστω $\mathbb{C}^\star$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Βρείτε την τάξη των κυκλικών υποομάδων τής $\mathbb{C}^\star$ που παράγονται από τα στοιχεία: i, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $1+i$. Σε κάθε μιά από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε όλους τούς γεννήτορες των κυκλικών υποομάδων.

Πρόβλημα 17. Στην ομάδα S_8 (η ομάδα μεταθέσεων τών 8 στοιχείων) θεωρούμε την μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.
α) Βρείτε την αντίστροφη μετάθεση σ^{-1}.
β) Βρείτε την τάξη $\mathrm{ord}(\sigma)$ τής σ.
γ) Υπολογίστε την μετάθεση σ^{154} και σ^{-154}.

Πρόβλημα 18. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων τού συνόλου $\{\sigma \in S_5 \text{ με } \sigma(3) = 4\}$.