ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #11

Πρόβλημα 1. Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα και $g \in G$ στοιχείο τάξεως n.
α) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο, και a ακέραιος, ισοδυναμεί με το ότι ο a είναι πολλαπλάσιο τού n.
β) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = g^b$, όπου a, b ακέραιοι, ισοδυναμεί με το ότι ο $a - b$ είναι πολλαπλάσιο τού n.

Πρόβλημα 2. Στην ομάδα S_8 βρείτε τις τροχιές τής μετάθεσης $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Γράψτε την σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και, επίσης, ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Πρόβλημα 3. Στην ομάδα S_6 εκφράστε κάθε μιά από τις παρακάτω μεταθέσεις ως γινόμενο ξένων κύκλων:
α) $(13)\,(23)$.
β) $(16)\,(26)\,(36)\,(46)\,(56)$.
γ) $(12345)\,(16)$.

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε την ομάδα S_n.
α) Εστω $s \leq n$. Βρείτε το αντίστροφο τού στοιχείου $(12 \ldots s)$.
β) Εστω $\tau = (1234)$. Βρείτε την τάξη τού στοιχείου τ. Εκφράστε τα τ^2, τ^3 ως γινόμενα ξένων κύκλων.
γ) Ποιά είναι η τάξη τού στοιχείου $\gamma = (12345)(567)$

Πρόβλημα 5. Εξετάστε αν η παρακάτω μετάθεση σ είναι άρτια ή περιττή:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 6. Στην ομάδα S_4, θεωρούμε το υποσύνολο $H = \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$.
α) Δείξτε ότι η H είναι υποομάδα τής S_4 και μάλιστα αβελιανή.
β) Γράψτε τα αριστερά σύμπλοκα τής H στην S_4.

Πρόβλημα 7. Στην ομάδα S_4 βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle (1324) \rangle$ και τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα τής H στην S_4.

Πρόβλημα 8. Στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle \bar{6} \rangle$ και τα αριστερά (που συμπίπτουν με τα δεξιά) σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{Z}_{18}$.
Πρόβλημα 9. Έστω H υποομάδα τής ομάδας μεταθέσεων S_n, $n \geq 2$. Δείξτε ότι ή όλες οι μεταθέσεις τής H είναι άρτιες ή ακριβώς οι μισές από τις μεταθέσεις τής H είναι άρτιες και οι άλλες μισές περιττές.

Πρόβλημα 10. Έστω ομάδα G, τής οποίας η τάξη είναι pq, όπου p, q πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα H τής G, με $H \neq G$, είναι κυκλική.

Πρόβλημα 11. Αποδείξτε ότι, αν μία ομάδα G έχει δύο, τουλάχιστον, στοιχεία και οι μόνες υποομάδες της είναι η G και η $\{e\}$, τότε η ομάδα είναι πεπερασμένη και η τάξη της είναι πρώτος αριθμός (*Υπόδειξη:* πάρτε ένα στοιχείο $a \neq e$ τής ομάδας και εξετάστε την κυκλική υποομάδα $< a >$).

Πρόβλημα 12. Εστω G ομάδα και H υποομάδα τής G με $(G : H) = 2$. Να αποδειχθεί ότι $a^2 \in H$, γιά κάθε $a \in G$.

Πρόβλημα 13. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε άν η απεικόνιση, που δίνεται, είναι ομομορφισμός. Στην περίπτωση που είναι ομομορφισμός βρείτε τον πυρήνα του και την εικόνα του.

1. Ὁμάδες $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(n) = -2n$.
2. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = [x]$.
3. Ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τή σχέση $\phi(x) = |x|$.
4. Ομάδα $(G, \star)$ και $\phi : G \longrightarrow G$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(g) = g^{-1}$.
5. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = e^x$.
6. Ομάδες $(\mathbb{Z}_6, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(\bar{a}_6) = \bar{a}_2$.
7. Ομάδες $(\mathbb{Z}_9, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(\bar{a}_9) = \bar{a}_2$.
8. Ομάδες $(\mathbb{Z}_{20}, +), (\mathbb{Z}_{12}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(\bar{a}_{20}) = 3\bar{a}_{12}$.
9. Ομάδες $(F, +), (\mathbb{R}, +)$, όπου F το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και $\phi : F \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(f) = \displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Πρόβλημα 14. Έστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι:
α) $\forall a \in G_1$ έχομε $\mathrm{ord}(\phi(a)) \mid \mathrm{ord}(a)$.
β) Αν, επιπλέον ο ϕ είναι ισομορφισμός, τότε δείξτε ότι $\mathrm{ord}(\phi(a)) = \mathrm{ord}(a)$.