ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω σχέσεις $\sim$ στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ ορίζουν σχέσεις ισοδυναμίας. Γιά κάθε μιά από τις τελευταίες περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.
α) $x \sim y$ αν $x \geq y$.
β) $x \sim y$ αν $|x| = |y|$.
γ) $x \sim y$ αν $|x - y| \leq 3$.

Πρόβλημα 2. Εστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Ορίζουμε $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$. Στο $\mathbb{Q}^*$ ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξής:

$$a \sim b \Longleftrightarrow a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρεθεί η κλάση ισοδυναμίας τού στοιχείου $5/2 \in \mathbb{Q}^*$.

Πρόβλημα 3. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξης: $a \sim b \Longleftrightarrow b - a \in \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε το σύνολο πηλίκων $\mathbb{C}/\sim$.

Πρόβλημα 4. Στο σύνολο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξης: $a \sim b$ αν και μόνον αν $ab > 0$. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει αυτή η σχέση.

Πρόβλημα 5. Έστω $\mathbb{Z}_m$ το σύνολο των ακεραίων modulo m τα στοιχεία τού οποίου τα έχουμε συμβολίσει ως $\bar{a}$, $a \in \mathbb{Z}$. Βρείτε τον ακέραιο r με $0 \leq r \leq m - 1$ για τον οποίο έχουμε:
α) $\overline{126} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_{12}$.
β) $\overline{-1} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_{12}$.
γ) $\overline{-20} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_8$.
δ) $\overline{-200} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_9$.

Πρόβλημα 6. Για ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η $\star$ ορίζει διμελή πράξη;. Στην περίπτωση που ορίζεται πράξη εξετάστε αν αυτή είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική και αν έχει ουδέτερο στοιχείο.
α) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = a + b$
β) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = \frac{a}{b}$
γ) Στο σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με $a \star b = a^b$
δ) Στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ με $a \star b = a^b$
ε) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = ab + 1$.
στ) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = |a|\, b$.

Πρόβλημα 7. Εστω $\star$ μια (διμελής) πράξη στο σύνολο A η οποία έχει ουδέτερο στοιχείο και για την οποία ισχύει ότι $a \star (b \star c) = (a \star c) \star b$, γιά κάθε $a, b, c \in A$. Να αποδειχθεί ότι η πράξη $\star$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.