

ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Πρόβλημα 1. Έστω (G, \star) ομάδα και $a, b \in G$. Δείξτε ότι $a \star b = e \iff b \star a = e$, όπου ως e συμβολίζουμε το ουδέτερο στοιχείο της G .

Πρόβλημα 2. Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω ζεύγη συνιστούν ομάδα:

α) $(\{-1, 0, 1\}, +)$.

β) $(A, +)$, όπου $A = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ συνεχής συνάρτηση}\}$. Η πράξη $+$ συμβολίζει το άθροισμα συναρτήσεων, δηλ. αν $f, g \in A$ τότε $f + g$ είναι η συνάρτηση με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

γ) (A, \cdot) , όπου A όπως στο β). Η πράξη \cdot συμβολίζει το γινόμενο συναρτήσεων, δηλ. αν $f, g \in A$ τότε $f \cdot g$ είναι η συνάρτηση με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

δ) (B, \cdot) , όπου $B = \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$ και \cdot ο πολλαπλασιασμός.

Πρόβλημα 3. Έστω n ένας φυσικός αριθμός. Συμβολίζουμε ως U_n το σύνολο των n -στών μιγαδικών ριζών της μονάδος, δηλ. το σύνολο των μιγαδικών λύσεων της εξίσωσης $z^n = 1$. Δείξτε ότι το (U_n, \cdot) , όπου \cdot ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών, είναι αβελιανή ομάδα.

Πρόβλημα 4. Έστω ακέραιος $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$, εφοδιασμένο με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των ακεραίων, είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, χωρίς μοναδιαίο στοιχείο.

Πρόβλημα 5. Βρείτε όλους τους διαιρέτες τού μηδενός στον δακτύλιο \mathbb{Z}_{20} . Για κάθε τέτοιο μηδενοδιαιρέτη \bar{a} βρείτε ένα στοιχείο $\bar{b} \neq 0$ με $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$.

Πρόβλημα 6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 - 2x + 2 = 0$ στον δακτύλιο \mathbb{Z}_6 . (δηλ. να βρεθούν όλα τα $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$ με $\bar{a}^2 - 2\bar{a} + \bar{2} = \bar{0}$).

β) $x^2 + 2x - 2 = 0$ στον δακτύλιο \mathbb{Z}_6 .

Πρόβλημα 7. Για να βρούμε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ δουλεύουμε ως εξής:

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \iff x(x - 3)(x + 1) = 0 \iff x = 0, 3, -1.$$

Η παραπάνω παραγοντοποίηση ισχύει και στον δακτύλιο \mathbb{Z}_{12} . Όμως η παραπάνω εξίσωση έχει ως λύσεις στον \mathbb{Z}_{12} , εκτός των $\bar{0}, \bar{3}, \bar{-1} = \bar{11}$, και την $\bar{8}$. Μπορείτε να δώσετε μια εξήγηση για αυτό;

Πρόβλημα 8. Έστω p πρώτος αριθμός. Ορίζουμε ως

$$A_p = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ όπου } m, n \in \mathbb{Z} \text{ και } \mu.κ.δ. (p, n) = 1 \right\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

α) Δείξτε ότι το A_p είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

β) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του.

Πρόβλημα 9. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}[i] = \{m + in, m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;

Πρόβλημα 10. Δείξτε ότι το σύνολο των πινάκων τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, με $a, b, c \in \mathbb{Z}$, εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι δακτύλιος. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;

Πρόβλημα 11. Δείξτε ότι το σύνολο $S = \{\frac{a}{2^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;