ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6

Πρόβλημα 1. Εστω M το σύνολο των 2×2 πινάκων με στοιχεία από τούς πραγματικούς αριθμούς, τής μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το M εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι σώμα.

Πρόβλημα 2. **α)** Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2}, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος τού δακτυλίου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
β) Δείξτε ότι αν $s \in \mathbb{N}$ το στοιχείο $(3 - 2\sqrt{2})^s$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Πρόβλημα 3. **α)** Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα τού σώματος των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
β) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi, \ \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα τού σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

Πρόβλημα 4. **α)** Έστω S_1 και S_2 υποδακτύλιοι δακτυλίου R. Δείξτε ότι η τομή τους $S_1 \cap S_2$ είναι υποδακτύλιος τού R.
β) Αν $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι το $n\mathbb{Z}$ (δηλ. το συνολο των πολλάπλασίων τού n) είναι υποοδακτύλιος τού $\mathbb{Z}$.
γ) Δείξτε ότι αν $n, m \in \mathbb{N}$ τότε $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = e\mathbb{Z}$, όπου e είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των n και m.

Πρόβλημα 5. Έστω R δακτύλιος και $R[x]_0$ το υποσύνολο τού $R[x]$ που περιέχει τα πολυώνυμα με σταθερό όρο μηδέν (δηλ. $a_0 = 0$). Δείξτε ότι το $R[x]_0$ είναι υποδακτύλιος τού $R[x]$.

Πρόβλημα 6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα στο $\mathbb{Z}_5[x]$:
α) $(-\bar{4} + \bar{1}x + \bar{3}x^2)(\bar{3} - x + \bar{3}x^2)$.
β) $(\bar{1} - \bar{2}x^2 + \bar{3}x^6)(\bar{2} + \bar{2}x + \bar{7}x^2)$.

Πρόβλημα 7. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $f(x)$ τού $\mathbb{Z}[x]$ που ικανοποιούν την συνθήκη $f(x) = f(-x)$. Ομοίως, να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα τού $\mathbb{Z}_2[x]$ που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη.

Πρόβλημα 8. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία (μονάδες) στους επόμενους δακτυλίους:
α) $\mathbb{Z}[x]$.
β) $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 9. α) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\bar{3} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο (μονάδα) τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[x]$.
β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\bar{4}x + \bar{3} \in \mathbb{Z}_8[x]$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο (μονάδα) τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.
γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_8[x]$ δεν είναι αντιστρέψιμο στοιχείο (μονάδα) τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.

Πρόβλημα 10. Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος και έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$, όπου $a_n \neq 0$, είναι διαιρέτης τού μηδενός. Δείξτε τότε ότι το $a_n \in R$ είναι διαιρέτης τού μηδενός.