ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 7

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$. Βρείτε όλες τις ρίζες τού $f(x)$: i) στο $\mathbb{Z}$, ii) στο $\mathbb{Q}$, iii) στο $\mathbb{R}$ και iv) στο $\mathbb{C}$.

Πρόβλημα 2. Βρείτε όλες τις ρίζες των παρακάτω πολυωνύμων:
α) $x^3 - \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$.
β) $x^5 + \bar{3}x^3 + x^2 + \bar{2}x \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 3. Βρείτε όλες τις ρίζες τού πολυωνύμου $f(x) = \bar{3}x^{223} + \bar{2}x^{70} + \bar{3}x^{61} + \bar{2}x^{40} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 4. α) Αποδείξτε τις εξής γενικεύσεις τού προβλήματος 8γ), φυλλάδιο 5. Αν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και $n \in \mathbb{N}$ τότε:
i) $(\bar{a} + \bar{b})^{p^n} = \bar{a}^{p^n} + \bar{b}^{p^n}$, για καθε $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$.
ii) $(\bar{a}_1 + \cdots + \bar{a}_k)^{p^n} = \bar{a}_1^{p^n} + \cdots + \bar{a}_k^{p^n}$, για καθε $\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_k \in \mathbb{Z}_p$.
β) Με χρήση τού ερωτήματος α) δείξτε ότι αν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ τότε $f(x)^p = f(x^p)$.
γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^p - \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$, p=πρώτος αριθμός, έχει μοναδική ρίζα.

Πρόβλημα 5. **α)** Εστω $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Δείξτε ότι αν $\xi = p/q \in \mathbb{Q}$ με $(p, q) = 1$ είναι ρίζα τού πολυωνύμου $f(x)$ στο $\mathbb{Q}$, τότε $q|a_n$.
β) Εστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ έχει ρίζα στο $\mathbb{Q}$. Δείξτε τότε ότι έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}$.

Πρόβλημα 6. **α)** Ειναι το $x^2 + \bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
β) Ειναι το $x^2 + \bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;
γ) Είναι το $x^3 + x + \bar{2}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
δ) Είναι το $x^3 - \bar{3}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_7[x]$;
ε) Είναι το $x^3 + x + \bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;
στ) Είναι το $x^3 - \bar{9}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_{11}[x]$;

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι το $x - \bar{1}$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$, αν και μόνον αν, το $f(x)$ έχει έναν άρτιο αριθμό μη μηδενικών συντελεστών.

Πρόβλημα 8. Βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 4 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$.

Πρόβλημα 9. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$ γράφεται ως γινόμενο τεσσάρων πολυωνύμων βαθμού ένα.

Πρόβλημα 10. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{f(x) \in \mathbb{R}[x],\ f(2) = 0\}$ είναι δακτύλιος.

Πρόβλημα 11. Διαιρέστε το $2x^5 - x^3 + 3x - 5$ με το $x^2 + 7$, θεωρώντας τα ως πολυώνυμα:

α) τού $\mathbb{Z}_3[x]$,
β) τού $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 12. Γράψτε το πολυώνυμο $x^4 - 1$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων, θεωρόντας το ως πολυώνυμο των δακτυλίων $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$.