ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 8

Πρόβλημα 1. **α)** Αναλύστε το πολυώνυμο $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ σε γινόμενο τριών μή σταθερών πολυωνύμων τού $\mathbb{Q}[x]$.
β) Αναλύστε το πολυώνυμο $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ σε γινόμενο τριών μή σταθερών πολυωνύμων τού $\mathbb{Q}[x]$, όπως επίσης, και σε γινόμενο επτά πρωτοβάθμιων πολυωνύμων τού $\mathbb{C}[x]$.

Πρόβλημα 2. **α)** Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^6 + x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ δεν είναι ανάγωγο (Υποδειξη: συσχετίστε το με τό $x^8 - 1$).
β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ δεν είναι ανάγωγο (Υποδειξη: συσχετίστε το με τό $x^6 - 1$).

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 + 16 \in \mathbb{R}[x]$ δεν είναι ανάγωγο πολυώνυμο.

Πρόβλημα 4. **α)** Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο.
β) Κάνοντας την διαίρεση τού $x^4 + \bar{1}$ δια τού $x^2 + x + \bar{2}$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$, δείξτε ότι το $x^4 + \bar{1}$ δεν είναι ανάγωγο πολυώνυμο στον $\mathbb{Z}_3[x]$.

Πρόβλημα 5. **α)** Κάνετε την διαίρεση τού πολυωνύμου $f(x) = \bar{2}x^4 + x^3 + x^2 + \bar{6}x + \bar{2}$ διά τού $g(x) = \bar{2}x^2 + \bar{2}$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_7[x]$.
β) Κάνετε την διαίρεση τού πολυωνύμου $\bar{2}x^5 - x^3 + \bar{3}x - \bar{1}$ διά τού $\bar{4}x^2 + \bar{3}$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 6. **α)** Βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού ≤ 2 και με μεγιστοβάθμιο συντελεστή $\bar{1}$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$. Δείξτε ότι το γινόμενό τους ισούται προς $x^9 - x$.
β) Βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 1 ή 3 και με μεγιστοβάθμιο συντελεστή $\bar{1}$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$. Δείξτε ότι το γινόμενό τους ισούται προς $x^{27} - x$.

Πρόβλημα 7. **α)** Γράψτε το $x^6 + 1$ ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και ανάγωγων δευτεροβάθμιων πολυωνύμων τού $\mathbb{R}[x]$.
β) Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 9 \in \mathbb{R}[x]$ το οποίο έχει ως ρίζα του το $i\sqrt{3}$. Γράψτε το $f(x)$ ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και ανάγωγων δευτεροβάθμιων πολυωνύμων τού $\mathbb{R}[x]$.

Πρόβλημα 8. Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού $x^{162} - \bar{3}x^{33} + x^{18} - \bar{1}$ διά τού $x - \bar{2}$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{17}[x]$ (Υπόδειξη: Ποιό είναι το υπόλοιπο ενός πολυωνύμου $f(x)$ διά τού $x - a$;).