ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 9

Πρόβλημα 1. Να βρεθεί ο μ.κ.δ.$(f(x), g(x))$ των παρακάτω πολυωνύμων τού $\mathbb{Q}[x]$ και να εκφραστεί στην μορφή μ.κ.δ.$(f(x), g(x)) = \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$.
α) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2,\ \ g(x) = x^2 - 5x + 6$.
β) $f(x) = x^5 + 3x^2 + 1,\ \ g(x) = x^2 - 1$.

Πρόβλημα 2. Να βρεθεί ο μ.κ.δ.$(f(x), g(x))$ των πολυωνύμων $f(x) = x^{12} + 1,\ \ g(x) = x^9 + 1$ τού $\mathbb{Z}_3[x]$ και να εκφραστεί στην μορφή μ.κ.δ.$(f(x), g(x)) = \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$.

Πρόβλημα 3. Γράψτε το πολυώνυμο $\bar{2}x^3 + x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 4. α) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - \bar{2}x^4 + x^3 - x^2 + \bar{2}x + \bar{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$.
β) Γράψτε το πολυώνυμο $f(x)$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 5. Γράψτε το πολυώνυμο $x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 2$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 6. Γράψτε το πολυώνυμο $x^4 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{R}[x]$ (Υπόδειξη: ποιές είναι οι μιγαδικές ρίζες τού πολυωνύμου;).

Πρόβλημα 7. Γράψτε το πολυώνυμο $x^8 - 1 \in \mathbb{R}[x]$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{R}[x]$.

Πρόβλημα 8. Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις ορίζουν ομομορφισμούς δακτυλίων $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
α) $\phi(z) = -z$.
β) $\phi(z) = \bar{z}$.
γ) $\phi(z) = |z|$.
δ) $\phi(z) = z^2$.

Πρόβλημα 9. **α)** Δείξτε ότι αν $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων τότε ή ϕ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός (δηλ. $\phi(m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$) ή ϕ είναι ο ταυτοτικός (δηλ. $\phi(m) = m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$). *Υπόδειξη:* εξετάστε την τιμή τού $\phi(1)$ και δείξτε ότι θα πρέπει $\phi(1) = 0$ ή 1).
β) Υπάρχει, μη μηδενικός, ομομορφισμός δακτυλίων από το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων; *Υπόδειξη:* δείξτε όπως παραπάνω ότι θα πρέπει $\phi(1) = 0$.

Πρόβλημα 10. Θεωρούμε την $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_5$ με $\phi(\bar{a}_{20}) = \bar{a}_5$ (εδώ συμβολίζουμε ως $\bar{a}_n$ τα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_n$).
α) Δείξτε ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (δηλ. ο ορισμός της δεν εξαρτάται

από την επιλογή αντιπροσώπου στην κλάση $\bar{a}_{20}$).
β) Δείξτε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και βρείτε τον πυρήνα του και την εικόνα του.

Πρόβλημα 11. Έστω $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_8$ με $\phi(\bar{a}_{20}) = \bar{a}_8$. Είναι η ϕ καλά ορισμένη απεικόνιση ;

Πρόβλημα 12. **α)** Δείξτε ότι στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ έχουμε $< n, m > = < d >$, όπου $d =$μ.κ.δ(n, m).
β) Δείξτε ότι το ιδεώδες $< 2, x >$ δεν είναι κύριο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$.