ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Έστω $f(x_0, x_1, x_2)$ ένα πολυώνυμο με την ιδιότητα $f(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^n f(x_0, x_1, x_2)$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (όπου $n \in \mathbb{N}$ σταθερό). Δείξτε ότι το $f(x_0, x_1, x_2)$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n.

Πρόβλημα 2. Έστω F ένα πολυώνυμο σε 3 μεταβλητές βαθμού n. Γράψτε το F ως $F = \sum_{i=0}^{n} F_i$, όπου τα F_i είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού i. Υποθέτουμε ότι για ένα σταθερό σημείο P στο προβολικό επίπεδο $\mathbb{PR}^2$ έχουμε ότι $F(a, b, c) = 0$ για όλους τούς αντιπροσώπους (a, b, c) των ομογενών συντεταγμένων τού P. Δείξτε ότι $F_i(a, b, c) = 0$, για κάθε $i = 0, \dots, n$ και για κάθε αντιπρόσωπο (a, b, c) των ομογενών συντεταγμένων τού σημείου P.

Πρόβλημα 3. Έστω F ένα ομογενές πολυώνυμο (τριών μεταβλητών) τέτοιο ώστε να γράφεται ως $F = G \cdot H$, όπου τα G, H κάποια πολυώνυμα. Δείξτε ότι τα G, H είναι ομογενή.

Πρόβλημα 4. Έστω $F(x_0, x_1, x_2)$ ομογενές πολυώνυμο 3 μεταβλητών, βαθμού n. Δείξτε ότι

$$\sum_{i=0}^{2} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = nF \, .$$

Υπόδειξη: Παραγωγίσατε, ως προς λ, την σχέση $F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^n F(x_0, x_1, x_2)$.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι οι λύσεις των εξισώσεων $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 = y$ στο $\mathbb{C}^2$ δεν είναι ισοδύναμες.

Πρόβλημα 6. Περιγράψτε τις λύσεις των παρακάτω πολυωνυμικών εξισώσεων στο $\mathbb{PR}^2$.

α) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
β) $x_1 + x_2 = 0$
γ) $x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_0 x_2 = 0$.
δ) $x_1^2 + x_2^2 - x_0 x_1 = 0$.
ε) $x_2^2 + x_0 x_1 - x_0 x_2 - x_1 x_2 = 0$.