ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι από δύο διαφορετικά σημεία $[a, b, c], [a', b', c']$ τού προβολικού επιπέδου $\mathbb{PC}^2$ περνάει μοναδική ευθεία και γράψτε την εξίσωσή της.

Πρόβλημα 2. Έστω $T : \mathbb{PC}^2 \longrightarrow \mathbb{PC}^2$ απεικόνιση που ορίζεται από έναν 3×3 αντιστρέψιμο πίνακα, όπως στο μάθημα (τέτοιες απεικονίσεις λέγονται προβολικοί μετασχηματισμοί). Έστω P, P' δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{PC}^2$. Δείξτε ότι η ευθεία που περνάει από τα P, P' (βλ. πρόβλημα 1) απεικονίζεται μέσω τού T στην ευθεία που περνάει από τα σημεία $T(P), T(P')$.

Πρόβλημα 3. Έστω E_0 η ευθεία στο άπειρο τού $\mathbb{PC}^2$ πού ορίζεται από την εξίσωση $x_0 = 0$. Έστω $P_0 = [1, 0, 0]$ και έστω $P = [a, b, c]$ ένα σημείο διαφορετικό τού P_0. Δείξτε ότι η ευθεία που περνάει από τα P_0, P τέμνει την ευθεία E_0 σε μοναδικό σημείο P' και βρείτε τις συντεταγμένες τού P' συναρτήσει των συντεταγμένων a, b, c τού σημείου P.

Πρόβλημα 4. Στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y]$ θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y - 3xy^2 + x^2 - 3xy \\ g(x,y) &= x^3y + x^3 - 4y^2 - 3y + 1. \end{aligned}$$

α) Υπολογίστε την $\mathrm{Res}(f, g)$ θεωρώντας τα f, g ώς στοιχεία τού $R[x]$, όπου $R = \mathbb{C}[y]$.
β) Υπολογίστε την $\mathrm{Res}(f, g)$ θεωρώντας τα f, g ώς στοιχεία τού $R[y]$, όπου $R = \mathbb{C}[x]$.
γ) Τί συμπέρασμα βγάζετε;

Πρόβλημα 5. Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.
α) Δείξτε ότι το f έχει ρίζα πολλαπλότητας ≥ 2 αν και μόνον αν $\mathrm{Res}(f, f') = 0$.
β) Υπολογίστε την $\mathrm{Res}(f, f') = 0$ στην περίπτωση που το f είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο.
γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = 6x^4 - 23x^3 + 32x^2 - 19x + 4$ έχει διπλή ρίζα. Ποιά είναι αυτή η ρίζα;

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $y^2 - x^3$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο (ως στοιχείο τού $\mathbb{C}[x, y]$).